2 Einfache Folgerungen aus den Axiomen

2.1 Anordnung

2.1.1 Hilfssatz: Seien A, P, Q drei Punkte auf einer Geraden. Dann gilt:
A liegt zwischen P und $Q \Leftrightarrow$
$d(A,P) < d(P,Q)$ und $d(A,Q) < d(P,Q)$.

Bew.: "$\Rightarrow$": A zwischen P und Q (*)
(*) $\Rightarrow$ A, P, Q verschieden $\Rightarrow$
$d(A,P) > 0 < d(A,Q)$ (1)
(*) $\Rightarrow d(A,P) + d(A,Q) = d(P,Q)$ (2)
(1), (2) $\Rightarrow$ Beh.
"$\Leftarrow$": $d(A,P) < d(P,Q)$ (+)
$d(A,Q) < d(P,Q)$ (++)
(+) $\Rightarrow A \neq Q$, $P \neq Q$
(++) $\Rightarrow A \neq P$
A, P, Q sind also drei verschiedene Punkte.
A, P, Q auf einer Geraden $\Rightarrow$ nach II/4 liegt einer der drei Punkte zwischen den beiden anderen, also

$d(A, P) + d(A, Q) = d(P, Q)$ (3) oder
$d(P, A) + d(P, Q) = d(A, Q)$ (4) oder
$d(Q, A) + d(Q, P) = d(A, P).$ (5)
(+) widerspricht (5),
(++) widerspricht (4),
also gilt (3). Also liegt A zwischen P und Q, w.z.z.w.

2.1.2 Hilfssatz: Sind $A, B \in \mathbb{E}$ mit $A \neq B$ und ist $C \in AB^+$, $C \neq A, B$, so liegt B zwischen A und C oder C zwischen A und B.

Bew.: Nach III/1 liegt A nicht zwischen B und C. Nach II/4 liegt einer der drei Punkte zwischen den beiden anderen.

2.1.3 Satz: Gibt es Strecken der Längen a, b, c, mit $c < a$, so gibt es auch Strecken der Längen $a + b$ und $a - c$.

Bew.: Sei g Gerade, $A \in g$, A Anfangspunkt einer Halbgeraden von g. Auf dieser Halbgeraden gibt es nach III/2 genau ein $B \in g$ mit $d(A, B) = a$. Auf BA^- gibt es genau ein $C \in g$ mit $d(B, C) = b$, auf BA^+ genau ein D mit $d(B, D) = c$. Dann ist $d(A, C) = a + b$, $d(A, D) = a - c$.

2.1.4 Bem.: Auf jeder Halbgeraden gibt es Strecken der Längen 1, 1+1 = 2, 2+1 = 3 usw.

2.1.5 Satz: Alle Halbgeraden (und damit alle Geraden) enthalten unendlich viele Punkte.

2.1.6 Hilfssatz: Für je drei verschiedene Punkte A, B, C einer Geraden gilt die Dreiecksungleichung: $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

2.1.7 Bem.: In 2.1.6 stehen drei Ungleichungen!

Bew. zu 2.1.6: Falls B zwischen A und C, gilt "$=$".
Falls A zwischen B und C, ist $d(B,C) > d(A,C)$.
Falls C zwischen A und B, ist $d(A,B) > d(A,C)$.

2.1.8 Hilfssatz: Liegt A zwischen P und Q und B zwischen A und Q, so liegt B zwischen P und Q.

Bew.: $d(A,B) + d(B,Q) = d(A,Q) < d(P,Q) \Rightarrow d(B,Q) < d(P,Q)$ (*)
$d(A,B) < d(A,Q) \Rightarrow d(P,B) = d(P,A) + d(A,B) < d(P,A) + d(A,Q) = d(P,Q)$ (**)
(*), (**), 2.1.1 $\Rightarrow$ Beh.

2.1.9 Def.: Eine Menge $M \subset \mathbb{E}$ heißt **konvex** $:\Leftrightarrow (P,Q \in M \Rightarrow \overline{PQ} \subset M)$.

2.1.10 Bem.: $\emptyset$ ist konvex.

2.1.11 Satz: M, N konvex $\Rightarrow M \cap N$ konvex.

Bew.: $P, Q \in M \cap N \Rightarrow P, Q \in M$ und $P, Q \in N \Rightarrow \overline{PQ} \in M$ und $\overline{PQ} \in N \Rightarrow \overline{PQ} \in M \cap N$

2.1.12 Satz: Alle Halbebenen sind konvex.

Bew.: Nach IV/1

2.1.13 Satz: Alle Halbgeraden sind konvex.

Bew.: Seien $P, Q \in AB^+$.
Zu zeigen: $\overline{PQ} \subset AB^+$.
Annahme: $X \in \overline{PQ} \cap AB^- \setminus \{A\}$.
$X \in \overline{PQ} \Rightarrow X$ zwischen P und Q. (*)
Da $X \neq A \neq Q$ liegt A nach III/1 zwischen X und Q. (**)
(*), (**) und 2.1.8 $\Rightarrow A$ zwischen P und Q. Widerspruch!

2.1.14 Satz: Ist $PQ \cap g = \{P\}$, und H die von g berandete Halbebene, die Q enthält, so ist $PQ^{+} = PQ \cap H$.

Bew.: Zu zeigen: $PQ^{-} \cap H = \{P\}$ und $PQ^{+} \subset H$.
Wäre $R \in PQ^{-} \cap H \setminus \{P\}$, so wäre $\overline{QR} \cap g = \{P\}$, also $R \notin H$.
Ist $S \in PQ^{+}$, so liegt P nicht zwischen S und Q (nach III/1). Folglich ist $\overline{SQ} \cap g = \emptyset$, also $S \in H$.

2.1.15 Satz: $A, B \in \mathbb{E}, A \neq B \Rightarrow$
(i) $\overline{AB} = AB^{+} \cap BA^{+}$
(ii) $AB^{-} \cap BA^{-} = \emptyset$

Bew.: Übung

2.1.16 Satz: Vor.: $A, B, C, D \in \mathbb{E}$, $C \neq A \neq B \neq D$, $C, D \in AB$
Beh.: $AC^{+} \cap BD^{+}$ ist leer oder gleich $\overline{AB}$ oder gleich AC^{+} oder gleich BD^{+}.

Bew.: Übung

2.1.17 Def.: Vor.: $A, B, C, D \in \mathbb{E}$, $C \neq A \neq B \neq D$, $C, D \in AB$
Ist dann $AC^+ \subset BD^+$ oder $BD^+ \subset AC^+$, so heißen AC^+ und BD^+ **gleichgerichtet**.

2.1.18 Def.: Vor.: $A, B, C \in \mathbb{E}$, $A \neq B$, $C \notin AB$
Dann heißt $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$ das **Dreieck** ABC, kurz ΔABC, mit den **Ecken** A, B, C und den Seiten $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$.
Seien die Halbebenen
H_A begrenzt von BC mit $A \in H_A$,
H_B begrenzt von CA mit $B \in H_B$,
H_C begrenzt von AB mit $C \in H_C$.
Dann heißt $(H_A \cap H_B \cap H_C) \setminus (\overline{AB} cup \overline{BC} \cup \overline{CA})$ das **Innere** des ΔABC.

Anmerkung: Die Voraussetzungen von 2.1.18 scheinen unsymmetrisch in A, B, C. Sie sind aber nur der Kürze halber unsymmetrisch aufgeschrieben.

Satz 2.1.19: Vor.: ABC ein Dreieck in $\mathbb{E}$, g eine Gerade in $\mathbb{E}$ mit $A, B, C \notin g$. Dann gilt:
$g \cap \overline{AB} \neq \emptyset \Rightarrow$ Genau eine der beiden Mengen $g \cap \overline{BC}$, $g \cap \overline{CA}$ ist $\neq \emptyset$.

Bew.: A, B liegen auf verschiedenen Seiten von g. Auf einer der beiden Seiten von g liegt C. Dann liegen entweder C und B oder C und A auf verschiedenen Seiten von g.

2.1.20 Historische Anmerkung: 2.1.19 wurde von David Hilbert als **Axiom von Pasch** bezeichnet, nach **Moritz Pasch** (1843 - 1930).

2.2 Bewegungen

2.2.1 Satz: Für jede Bewegung σ gilt:

(i) Seien $A, B, P \in \mathbb{E}$. Dann gilt: P zwischen A und $B \Leftrightarrow \sigma(P)$ zwischen $\sigma(A)$ und $\sigma(B)$

(ii) σ bildet Strecken auf Strecken, Geraden auf Geraden und Halbgeraden auf Halbgeraden ab.

(iii) Liegen P, Q und $R \in \mathbb{E}$ nicht auf einer Geraden, so auch nicht $\sigma(P)$, $\sigma(Q)$ und $\sigma(R)$.

(iv) $\forall P' \in \mathbb{E}$ gibt es genau ein $P \in \mathbb{E}$ mit $\sigma(P) = P'$.

(v) σ bildet Halbebenen auf Halbebenen ab.

Bew.:

(i) σ erhält Abstände. Der "zwischen"-Begriff ist durch Abstände definiert.

(ii) Nach (i): $A, B \in \mathbb{E}, A \neq B \Rightarrow \overline{\sigma(A)\sigma(B)} \subset \overline{AB}$
Da σ^{-1} eine Bewegung: $\overline{\sigma^{-1}(A)\sigma^{-1}(B)} \subset \overline{AB} \Rightarrow$
$\overline{AB} \subset \overline{\sigma(A)\sigma(B)} \Rightarrow$
Gleichheit: $\sigma(\overline{AB}) = \overline{\sigma(A)\sigma(B)}$

Sei nun $P \in AB$, $A \neq P \neq B$. Dann liegt nach II/4 mindestens einer der Punkte A, B, P zwischen den beiden anderen, also nach (i) mindestens einer der drei Punkte $\sigma(A), \sigma(B), \sigma(P)$ zwischen den beiden anderen. Nach II/3 liegen dann $\sigma(A), \sigma(B), \sigma(P)$ auf einer Geraden. Damit ist $\sigma(AB) \subset \sigma(A)\sigma(B)$. Da auch σ^{-1} eine Bewegung ist, folgt wie oben $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$.

Sei nun $P \in AB^+ \setminus \{A, B\}$. Annahme: $\sigma(P) \notin \sigma(A)\sigma(B)^+$. Dann ist $A \notin \overline{BP}$ aber $\sigma(A) \in \sigma(B)\sigma(P)$. Widerspruch!

(iii) Lägen $\sigma(P)$, $\sigma(Q)$ und $\sigma(R)$ auf einer Geraden, so müssten auch P, Q, R auf einer Geraden liegen, da mit σ auch σ^{-1} eine Bewegung ist.

(iv) Als Bewegung ist σ bijektiv.

(v) Sei H die durch g berandete Halbebene, in der $A \notin g$ liegt. Dann ist $P \notin H \Leftrightarrow P \notin g$ und $\overline{AP} \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow \sigma(P) \notin \sigma(g)$ und $\overline{\sigma(A)\sigma(P)} \cap \sigma(g) \neq \emptyset \Leftrightarrow \sigma(P)$ liegt nicht in der durch $\sigma(g)$ berandeten Halbebene H', in der $\sigma(A)$ liegt. Folglich ist $\sigma^{-1}(H') \subset H$ für jede Bewegung σ^{-1} und jede Halbebene H', also auch $\sigma(H) \subset H'$ und damit $\sigma(H) = H'$.

2.2.2 Satz: Sind zwei Winkel $\angle(SA^+, SB^+)$ und $\angle(PQ^+, PR^+)$ kongruent, so gibt es genau eine Bewegung, die SA^+ auf PQ^+ und SB^+ auf PR^+ abbildet.

Bew.: ohne

Satz 2.2.3: Seien AB^+, PQ^+ Halbgeraden und die Halbebenen H und K durch AB bzw. PQ berandet. Dann gibt es genau eine Bewegung, die A auf P, AB^+ auf PQ^+ und H auf K abbildet.

Bew.: ohne

2.2.4 Bem.: Der Satz 2.2.3 heißt **Fahnensatz**.

Aus 2.2.3 und 1.5.16 folgt:

2.2.5 Bem.: Seien $A, B, P, Q \in \mathbb{E}$, $A \neq B$, $P \neq Q$. Dann gilt: $\overline{AB}$ ist kongruent zu $\overline{PQ}$ $\Leftrightarrow d(A, B) = d(P, Q)$.

2.3 Winkel

2.3.1 Def.: Zu einem Winkel $\angle ASB$ sei H_A die Halbebene, die A enthält und von SB berandet wird, H_B die Halbebene, die B enthält und von SA berandet wird. Dann heißt $(H_A \cap H_B) \setminus (SA^+ \cup SB^+)$ das **Innere** von $\angle ASB$.

2.3.2 Bem.: Das Innere jedes Winkels ist konvex.

2.3.3 Hilfssatz: Liegt P im Innern von $\angle ASB \Rightarrow SP^+ \setminus \{S\}$ liegt im Innern von $\angle ASB$.

Bew.: Sei $Q \in SP^+ \setminus \{S, p\}$. Dann ist $PQ \cap SA = PQ \cap SB = \{S\}$ und $S \notin \overline{PQ}$. Also ist $\overline{PQ} \cap SA = \emptyset = \overline{PQ} \cap SB$. Damit ist $Q \in H_B$ und $Q \in H_A$.

2.3.4 Satz: $P \in \mathbb{E} \setminus \{S\}$ liegt im Innern von $\angle ASB \Leftrightarrow SP^+ \cap (\overline{AB} \setminus \{A, B\}) \neq \emptyset$.

Bew.: Übung. Hinweis: Axiom von Pasch verwenden!

2.3.5 Def.: Ein Winkel $\angle PQR$ heißt **kleiner als** $\angle ASB$ $:\Leftrightarrow$ $\angle PQR$ ist kongruent zu $\angle ASC$, wobei C im Innern von $\angle ASB$. Ist $\angle PQR$ kleiner als $\angle ASB$, so heißt $\angle ASB$ **größer als** $\angle PQR$.
Schreibweisen: $\angle PQR < \angle ASB$, $\angle ASB > \angle PQR$.

2.3.6 Bem.: Wegen 2.2.2 und IV/3 (Eindeutigkeit der Winkelabtragung und Symmetrie von Winkeln) ist 2.3.5 sinnvoll.
Sind zwei Winkel nicht kongruent, ist stets einer kleiner als der andere.
Ist $\angle PQR$ kongruent zu $\angle P'Q'R'$ und $\angle PQR < \angle ASB$, so auch $\angle P'Q'R' < \angle ASB$.
Da aus $M \subset N$ stets $\sigma(M) \subset \sigma(N)$ folgt, und da die Bewegungen eine Gruppe bilden, sind $<$ und $>$ transitive Relationen.

2.3.7 Bez.: Kongruente Winkel w_1, w_2 heißen **gleich groß**, in Zeichen: $w_1 = w_2$.

2.3.8 Def.: Die Winkel $\angle ASB$ und $\angle BSC$ heißen **benachbart**, wenn das Innere von $\angle ASB$ mit dem Inneren von $\angle BSC$ leeren Schnitt hat. SA^+ und SC^+ heißen dann die **Randschenkel**.

2.3.9 Def.: Liegt $B \in \mathbb{E}$ im Inneren des Winkels $\angle ASC$, so sind die Winkel $\angle ASB$ und $\angle BSC$ benachbart, und $\angle ASC$ heißt die **Summe** von $\angle ASB$ und $\angle BSC$ und $\angle ASB$ die **Differenz** von $\angle ASC$ und $\angle BSC$.

2.3.10 Bem.: In 2.3.9 ist vorausgesetzt, dass $\angle ASC$ ein Winkel ist.

2.3.11 Def.: Sind $\angle PQR$ und $\angle STU$ kongruent zu $\angle ASB$ und $\angle BSC$ und ist $\angle ASC$ die Summe von $\angle ASB$ und $\angle BSC$, so heißt jeder Winkel, der kongruent ist zu $\angle ASC$ Summe von $\angle PQR$ und $\angle STU$.

2.3.12 Def.: Sind $\angle ABC$ und $\angle DEF$ sowie $\angle PQR$ und $\angle STU$ beliebige Winkel, so gibt es nach dem Fahnensatz Bewegungen σ, τ, ρ, für die gilt:
$Q' := \sigma(Q) = B$, $P' := \sigma(P)$, $Q'P'^{+} = BA^{+}$, $R' := \sigma(R)$ und C liegen auf derselben Seite von BA, $E' := \tau(E) = B$, $D' := \tau(D)$, $E'D'^{+} = BC^{+}$. $F' := \tau(F)$ und A liegen auf verschiedenen Seiten von BC, $T' := \rho(T) = B$, $S' := \rho(S)$, $T'S'^{+} = Q'R'^{+}$, $U' := \rho(U)$ und P' liegen auf verschiedenen Seiten von $Q'R'$.
Die **Summe** von $\angle ABC$ und $\angle DEF$ heißt dann **so groß wie die Summe** von $\angle PQR$ und $\angle STU$, wenn gilt: $E'F'^{+} = T'U'^{+}$.

2.3.13 Bem.: In 2.3.12 liegt BC^{+} nicht notwendig im Innern von $\angle ABF'$.

2.3.14 Hilfssatz:

(i) Gilt für benachbarte Winkel $\angle ABC$, $\angle CBD$, dass $BA^+ \cup BD^+ = AD$ sowie für $\angle PQR$, $\angle RQS$, dass $QP^+ \cup QR^+ = PR$, so ist die Summe der Winkel $\angle ABC$ und $\angle CBD$ so groß wie die Summe der Winkel $\angle PQR$ und $\angle RQS$.

(ii) Für benachbarte Winkel $\angle ABC$ und $\angle CBD$ sowie $\angle ABE$ und $\angle EBD$ ist stets die Summe von $\angle ABC$ und $\angle CBD$ so groß wie die Summe von $\angle ABE$ und $\angle EBD$, wenn C, E auf derselben Seite von AB liegen.

2.3.15 Def.: Zu einem Winkel $\angle ASB$ ist $SB^- \cup SA^-$ der **Scheitelwinkel**. Sowohl $SB^+ \cup SA^-$ als auch $SB^- \cup SA^+$ sind **Nebenwinkel** von $\angle ASB$.

2.3.16 Satz: Scheitelwinkel sind kongruent. Nebenwinkel zu demselben Winkel sind kongruent.

Bew.: (Bezeichnungen aus 2.3.16) Da $SB^+ \cup SA^-$ ein Winkel ist, gibt es nach Axiom IV/3 eine Bewegung σ, die SB^+ auf SA^- und SA^- auf SB^+ abbildet. Diese bildet $SB^+ \cup SA^+$ ab auf $SA^- \cup SB^-$. Da $SB^+ \cup SA^+$ ein Winkel ist, gibt es nach IV/3 eine Bewegung τ, die SB^+ auf SA^+ und SA^+ auf SB^+ abbildet. Diese bildet die beiden Nebenwinkel von $\angle ASB$ aufeinander ab.

2.3.17 Def.: Schneidet eine Gerade g in $\mathbb{E}$ die Geraden a, b in den Punkten A, B, so heißen zwei Winkel mit den Scheiteln A und B und Schenkeln auf a und g bzw. auf b und g:
Stufenwinkel oder **F-Winkel**, wenn sie auf derselben Seite von g liegen und die Schenkel auf g gleichgerichtet sind,
Wechselwinkel oder **Z-Winkel**, wenn sie auf verschiedenen Seiten von g liegen und die Schenkel auf g nicht gleichgerichtet sind.

2.3.18 Satz: Schneidet eine Gerade g in $\mathbb{E}$ die Geraden a, b, so gilt: Z-Winkel sind gleich $\Leftrightarrow$ F-Winkel sind gleich.

Bew.: 2.3.16