Elementargeometrie

Vorlesung von

Prof. Dr. Johann Hartl
Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

Wintersemester 2015/16

Diese Folien bilden kein Skriptum zur Vorlesung.
Sie sollen das Mitschreiben entlasten.

Was wollen wir lernen?

Zum einen: **Elementargeometrie** —

Geometrie in der Zeichenebene

Einiges wissen wir schon:

- Lehrsatz des Pythagoras
- Winkelsumme im Dreieck
- usw.

Zum anderen: Einfache **Konstruktionen**, z.B. von Dreiecken

Lösen von **Aufgaben**

Begründungen für Aussagen in der Elementargeometrie

Schließlich: **Begründung der Elementargeometrie durch Axiome**

Das ist ganz schön viel für eine zweistündige Vorlesung.

Zum methodischen Vorgehen: Doppelstrategie

Zeichenebene:

- Wir haben Vorwissen.

- Wir verwenden Vorwissen.

Wir greifen damit vor: der Entwicklung in der

Ebene $\mathbb{E}$, für die gilt:

- Wir formulieren Axiome.

- Wir formulieren Definitionen.

- Wir beweisen Sätze.

- Wir verwenden nur vorher formulierte Axiome und Definitionen sowie vorher formulierte Sätze.

Einschränkung: Manche Sätze beweisen wir nicht — um Zeit zu sparen.

Später können wir manchmal sagen: In $\mathbb{E}$ geht es so wie vorher in der Zeichenebene.

1 Axiomatik. Warum?

1.1 Was ist Elementargeometrie:

zwei- und dreidimensionale euklidische Geometrie
mit einer bestimmten Sichtweise

(in dieser Vorlesung nur zweidimensionale Geometrie)

"Ein Punkt ist genau das, was der intelligente, aber harmlose, unverbildete Leser sich darunter vorstellt." (Oskar Perron: Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene, Stuttgart 1962, S. 11)

Die Geometrie wurde eine Wissenschaft bei den Griechen etwa ab Thales von Milet (ca. 624 v.Chr. - ca. 546 v.Chr.). Er begründet erstmals geometrische Aussagen durch "einfachere" geometrische Aussagen.

Etwa 300 Jahre später:

Die 13 Bücher der "Elemente" des Euklid (ca. 300 v.Chr.). Sie beherrschten den mathematischen = geometrischen Unterricht bis in die Neuzeit — auch an den Universitäten.

Erst im 19. Jahrhundert wurden die letzten Lücken im rein logischen Aufbau der euklidischen Geometrie geschlossen, wohl von Moritz Pasch (1843 - 1930) in den "Vorlesungen über neuere Geometrie" (1882).

Andere Sichtweise: Grundlagen der Geometrie:
Seit David Hilbert (1862 - 1943) mit seinen "Grundlagen der Geometrie" (1899, als Lehrbuch 1903, 11. Auflage Stuttgart 1972, neuere Nachdrucke) nur noch interessiert an Axiomensystemen und Folgerungen daraus.

"Man muß jederzeit an Stelle von 'Punkten, Geraden, Ebenen', 'Tische, Stühle, Bierseidel' sagen können."
Hilbert bei einem Gespräch in einem Berliner Wartesaal
(hier zitiert nach Herbert Meschkowski: Mathematiker-Lexikon, Mannheim/Zürich 1964, S. 122)

Zu Grundlagen der Geometrie: Helmut Karzel, Kai Sörensen, Dirk Windelberg: Einführung in die Geometrie, Göttingen 1973

Anderes Herangehen: Analytische Geometrie: Einführung eines Koordinatensystems und rechnerische Behandlung geometrischer Aufgaben

1.2 Der Satz vom gleichschenkligen Dreieck

Satz: Jedes Dreieck ist gleichschenklig.

Beweis: Anhand einer Tafelskizze

In den Voraussetzungen des Satzes vom gleichschenkligen Dreieck sind keine Dreiecksseiten vor anderen ausgezeichnet. Daher gilt das

Korollar: Jedes Dreieck ist gleichseitig.

Bemerkung: Der Satz ist falsch. Also muss im Beweis ein Fehler sein! Wo steckt der Fehler?

Bemerkung: Man muss aufpassen wie ein Haftelmacher, damit man nicht etwas Falsches beweist.

1.3 Eine sichere Grundlage für die Elementargeometrie?

Axiomatischer Aufbau einer **Theorie**:

- Man wählt Aussagen aus der Theorie als **Axiome** aus
und zwar in der Regel möglichst einfache Aussagen.

- Man führt in **Definitionen** neue Bezeichnungen als Abkürzungen ein.

- Aus den Axiomen und Definitionen beweist man **Sätze** (**Theoreme**), wobei man im Beweis nur logische Schlüsse, die Axiome und Definitionen und bereits bewiesene Sätze verwenden darf.

Alle so bewiesenen Sätze dieser Theorie sind sicher.

Soweit die Theorie.

1.4 Einige Bezeichnungen:

Grundbegriffe:

- Punkte
- Geraden (mit dem Lineal zu zeichnen)
- Ebenen (hier kommt nur die eine Ebene $\mathbb{E}$ vor)

Bezeichnungen:

Punkte: A, B, ..., P, Q, ..., X, Y, ...
Geraden: g, h, ..., a, b, ...
Ebenen: α, β, γ, ... (treten hier nicht auf)

Wir wollen Kurzschreibweisen für Aussagen und verwenden dafür die Sprache der Mengenlehre.

$\mathcal{G}$ ... Menge der Geraden in $\mathbb{E}$

Wir fassen Geraden und Ebenen als Punktmengen auf, z.B.

$P \in g$,

$g \cap h = \{S\}$

Das gefällt mir besser als $g \cap h = S$.

1.5 Zur Axiomatik der ebenen euklidischen Geometrie

1.5.1 Wir **stellen uns** Punkte, Geraden und Ebenen als räumliche Gebilde **vor**, wollen aber Aussagen beweisen und müssen daher Voraussetzungen aufschreiben, also **axiomatisch vorgehen**.

Wir beginnen mit **ebener Geometrie:**

Alle Punkte und Geraden liegen bis auf weiteres in **einer** Ebene $\mathbb{E}$.

Axiom I/1: Zu je zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die diese beiden Punkte enthält.

in Zeichen (i.Z.):

$$\forall\ P, Q \in \mathbb{E} \text{ mit } P \neq Q\ \exists_1\ g \in \mathcal{G} : P, Q \in g$$

1.5.2 Bezeichnungen: $g =: PQ$ heißt die **Verbindungsgerade** von P und Q

P **liegt auf** PQ, PQ **geht durch** P

1.5.3 Bemerkung: Aus **I/1** folgt: Zwei verschiedene Geraden haben genau einen oder keinen Punkt gemeinsam.

i.Z.:

$$g, h \in \mathcal{G} \Rightarrow g = h \vee |g \cap h| = 1 \vee g \cap h = \emptyset$$

1.5.4 Definition: $|g \cap h| = 1 \ldots g$ und h **schneiden einander** (in einem Punkt)
$g \cap h = \emptyset \ldots g$ und h sind **parallel**

Vorsicht! Das gilt nur in der Ebene!

Axiom I/2: Jede Gerade enthält mindestens zwei verschiedene Punkte.

i.Z.:

$$g \in \mathcal{G} \Rightarrow |g| \geq 2$$

Axiom II/1: Je zwei (nicht notwendig verschiedene) Punkte besitzen einen eindeutigen reellen nicht negativen Abstand. Der Abstand zweier Punkte ist genau dann null, wenn beide Punkte gleich sind.

1.5.5 Bezeichnung: Wir bezeichnen den Abstand zweier Punkte P, Q mit $d(P, Q)$. Dann ist d eine Abbildung $d : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, für die gilt:

$$\forall\ P, Q \in \mathbb{E} : d(P, Q) = d(Q, P)$$

$$\forall\ P, Q \in \mathbb{E} : d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$$

Axiom II/2: Es gibt zwei Punkte mit dem Abstand 1.

Achtung! In der euklidischen Geometrie können wir Figuren ähnlich vergrößern und verkleinern, aber das ist nicht selbstverständlich. Daher ist **II/2** tieferliegend als es aussieht.

1.5.6 Bemerkung: Eine Lücke bei Euklid ergibt sich, weil er die Anordnung nicht behandelt.

1.5.7 Definition: Sind P, Q, R drei verschiedene Punkte und gilt

$$d(P, Q) + d(Q, R) = d(P, R),$$

so liegt Q **zwischen** P und R.

1.5.8 Bemerkung: liegt Q zwischen P und R, so liegt Q auch zwischen R und P. Warum?

Axiom II/3: Liegt von drei verschiedenen Punkten einer zwischen den beiden anderen, so liegen die drei Punkte auf einer Geraden.

Axiom II/4: Liegen drei verschiedene Punkte auf einer Geraden, so liegt mindestens einer der drei Punkte zwischen den beiden anderen.

1.5.9 Bemerkung: Liegt Q zwischen P und R, so ist $d(P, R) > d(P, Q)$ und $d(P, R) > d(Q, R)$. Folglich liegt P nicht zwischen Q und R und auch R nicht zwischen P und Q. Folglich gilt der

1.5.10 Satz: Liegen drei verschiedene Punkte auf einer Geraden, so liegt genau einer der drei Punkte zwischen den beiden anderen.

1.5.11 Definition: Seien P, Q zwei verschiedene Punkte. Die Menge aller zwischen P und Q liegenden Punkte vereinigt mit $\{P, Q\}$ heißt die **Verbindungsstrecke** von P und Q oder die **Strecke** $\overline{PQ}$. Die Punkte zwischen P und Q heißen die **inneren Punkte** von $\overline{PQ}$; die Punkte P und Q heißen die **Endpunkte** von $\overline{PQ}$; der Abstand $d(P, Q)$ heißt die **Länge** von $\overline{PQ}$. Ist die Länge einer Strecke $\overline{PQ}$ größer als die Länge einer Strecke $\overline{RS}$, so heißt $\overline{PQ}$ größer als $\overline{RS}$ und $\overline{RS}$ kleiner als $\overline{PQ}$.

Axiom III/1: Liegt ein Punkt P auf einer Geraden g, so gilt: Die Gerade g ohne den Punkt P zerfällt in zwei punktfremde Teilmengen, so dass gilt: Zwei Punkte von $g \setminus \{P\}$ liegen in verschiedenen dieser Teilmengen genau dann, wenn P zwischen ihnen liegt.

1.5.12 Bezeichnung: Nimmt man zu den beiden Teilmengen von **III/1** jeweils den Punkt P hinzu, so erhält man die beiden **Halbgeraden** von g mit **Anfangspunkt** P. Ist $g = PQ$, so bezeichnet PQ^+ diejenige Halbgerade mit Anfangspunkt P, auf der Q liegt, PQ^- die andere Halbgerade mit Anfangspunkt P.

1.5.13 Bemerkung: $PQ^+ \cap PQ^- = \{P\}$

1.5.14 Bezeichnung: PQ^+ heißt **komplementär** zu PQ^-.

1.5.15 Bemerkung: Wir wissen noch nicht, ob $PQ^- \neq \{P\}$.

Axiom III/2: Seien A, P, Q drei Punkte mit $P \neq Q$. Gibt es eine Strecke der Länge l und ist $l > d(A,P)$, so gibt es genau einen Punkt $B \in PQ^+$ und genau einen Punkt $C \in PQ^-$ mit $d(A,B) = l = d(A,C)$.

Mit $A = P$ folgt:

1.5.16 Satz: Gibt es eine Strecke der Länge l, so gibt es auf jeder Halbgeraden mit Anfangspunkt P genau einen Punkt B mit $d(P,B) = l$.

Axiom IV/1: Jede Gerade g teilt die Ebene ohne g in zwei punktfremde und nicht leere Teilmengen, so dass zwei Punkte P, $Q \notin g$ genau dann in verschiedenen dieser Teilmengen liegen, wenn $\overline{PQ} \cap g \neq \emptyset$.

1.5.17 Bezeichnung: Nimmt man zu den beiden Mengen aus **IV/1** jeweils g hinzu, so erhält man die beiden von g **berandeten Halbebenen**. Liegen P, Q in einer der von g berandeten Halbebenen, so liegen sie **auf derselben Seite von** g, andernfalls **auf verschiedenen Seiten von** g.

1.5.18 Bemerkung: Ist $P \in g$, so gilt für alle Punkte Q: P, Q liegen auf derselben Seite von g.

1.5.19 Definition: Die Vereinigung zweier Halbgeraden $SA^+ \cup SB^+$, die nicht auf derselben Geraden liegen, heißt ein **Winkel**. Der Punkt S heißt der **Scheitel** des Winkels, SA^+ und SB^+ seine Schenkel. Bezeichnung: $\angle(SA^+, SB^+)$ oder $\angle ASB$.

1.5.20 Bemerkung: Winkel sind nicht orientiert. Wir können Winkel noch nicht vergleichen und messen.

1.5.21 Definition: Jede bijektive Abbildung $\sigma : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ mit der Eigenschaft $d(\sigma(P), \sigma(Q)) = d(P, Q)$ für alle $P, Q \in \mathbb{E}$ heißt **Bewegung**.

1.5.22 Bemerkung: Die identische Abbildung ist eine Bewegung. Mit σ ist auch σ^{-1} eine Bewegung. Die Bewegungen von $\mathbb{E}$ bilden eine Gruppe, die **Bewegungsgruppe** von $\mathbb{E}$.

1.5.23 Definition: Sind $M, N \subset \mathbb{E}$, und gibt es eine Bewegung τ mit $\tau(M) = N$, so heißen M, N **zueinander kongruent**.

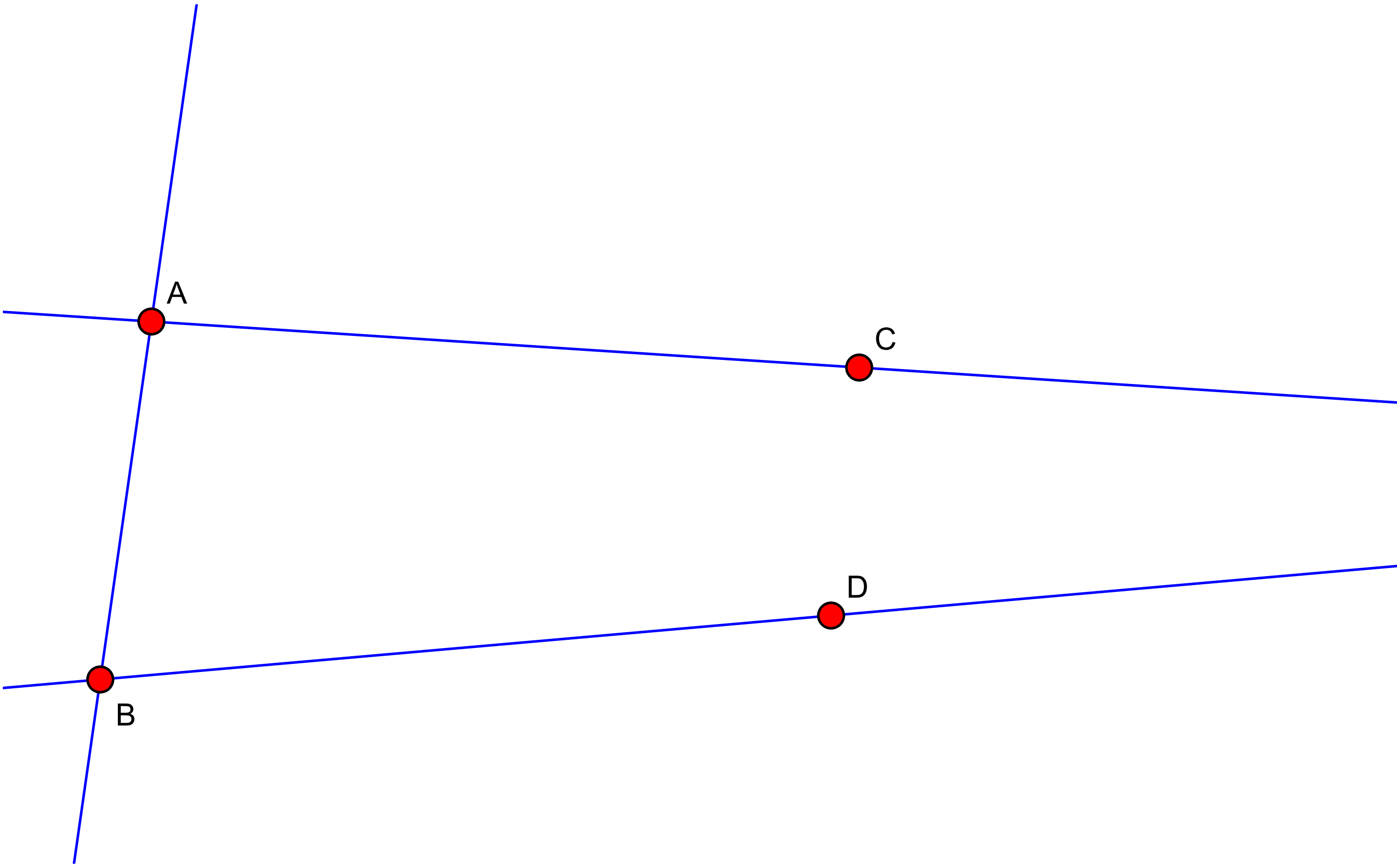
1.5.24 Bemerkung: Jede Punktmenge ist zu sich selbst kongruent.

Axiom IV/2: Seien $\angle(SA^+, SB^+)$ ein Winkel, PQ eine Gerade und H eine von PQ berandete Halbebene. Dann gibt es genau einen zu $\angle(SA^+, SB^+)$ kongruenten Winkel $\angle(PQ^+, PR^+)$ mit $R \in H$.

Axiom IV/3: Für jeden Winkel $\angle(SA^+, SB^+)$ gibt es eine Bewegung, die SA^+ auf SB^+ abbildet und SB^+ auf SA^+.

Axiom V: Zu jeder Geraden g und zu jedem Punkt $P \notin g$ gibt es genau eine Gerade h mit $P \in h$ und $g \cap h = \emptyset$.

1.5.25 Geschichtliche Anmerkung



Euklid kann beweisen:

$\angle DBA + \angle BAC = 2$ R(echte Winkel) $\Rightarrow$
$AC \parallel BD$ (1)

Bei Euklid Axiom:

$\angle DBA + \angle BAC < 2\text{R} \Rightarrow AC \cap BD \neq \emptyset$,
Schnittpunkt auf der Seite von AB, auf der
C, D liegen (2)

(1) und (2) $\Leftrightarrow$ **V**
(unter Verwendung der anderen Axiome Euklids)

Viele Versuche, (2) zu beweisen, bis ca. 1800

Dann sind Gauß, Bolyai (Johann, nicht Wolfgang) und Lobatschewski unabhängig voneinander überzeugt, dass das nicht geht.

Seit ca. 1870 kann man das beweisen durch Angabe von Modellen der "nicht-euklidischen (hyperbolischen) Geometrie", in denen (2) nicht gilt, aber alle anderen Axiome Euklids.