Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. Dr. J. Hartl

WS 2015/16
Blatt 8

Elementargeometrie

Wir betrachten in der Zeichenebene ε einen festen Kreis ω. Die Punkte im Inneren von ω (ohne Rand) bezeichnen wir als **h-Punkte**. Die Menge der h-Punkte bezeichnen wir als **h-Ebene**. Von jeder Geraden g, die h-Punkte enthält, bezeichnen wir den Schnitt von g mit dem Inneren von ω als **h-Gerade**.

Sind P, Q zwei h-Punkte einer Geraden g, die ω in den beiden Punkten I und J schneidet, so ist der Abstand $d(P,Q)$ definiert durch

$$d(P,Q) = \frac{1}{2}|\ln(DV(PQIJ))|.$$

Die Begriffe **zwischen**, **h-Strecke**, **h-Halbgerade**, **h-Winkel** usw. werden analog zu den Begriffen aus der Vorlesung definiert.

Als **h-Bewegung** bezeichnen wir jede ebene projektive Abbildung, die ω als Menge festlässt.

Überprüfen Sie — soweit das mit Ihren Vorkenntnissen möglich ist — die Gültigkeit der folgenden Axiome in diesem Modell:

Axiom I/1: Zu je zwei verschiedenen h-Punkten gibt es genau eine h-Gerade, die diese beiden Punkte enthält.

Axiom I/2: Jede h-Gerade enthält mindestens zwei verschiedene h-Punkte.

Axiom II/1: Je zwei (nicht notwendig verschiedene) h-Punkte besitzen einen eindeutigen reellen nicht negativen Abstand. Der Abstand zweier h-Punkte ist genau dann null, wenn beide h-Punkte gleich sind.

Axiom II/2: Es gibt zwei h-Punkte mit dem Abstand 1.

Axiom II/3: Liegt von drei verschiedenen h-Punkten einer zwischen den beiden anderen, so liegen die drei h-Punkte auf einer h-Geraden.

Axiom II/4: Liegen drei verschiedene h-Punkte auf einer h-Geraden, so liegt mindestens einer der drei h-Punkte zwischen den beiden anderen.

Axiom III/1: Liegt ein h-Punkt P auf einer h-Geraden g, so gilt: Die h-Gerade g ohne den h-Punkt P zerfällt in zwei punktfremde Teilmengen, so dass gilt: Zwei h-Punkte von $g \setminus \{P\}$ liegen in verschiedenen dieser Teilmengen genau dann, wenn P zwischen ihnen liegt.

Axiom III/2: Seien A, P, Q drei h-Punkte mit $P \neq Q$. Gibt es eine h-Strecke der Länge l und ist $l > d(A, P)$, so gibt es genau einen h-Punkt $B \in PQ^+$ und genau einen h-Punkt $C \in PQ^-$ mit $d(A, B) = l = d(A, C)$.

Axiom IV/1: Jede h-Gerade g teilt die h-Ebene ohne g in zwei punktfremde und nicht leere Teilmengen, so dass zwei h-Punkte P, $Q \notin g$ genau dann in verschiedenen dieser Teilmengen liegen, wenn $\overline{PQ} \cap g \neq \emptyset$.

Axiom IV/2: Seien $\angle(SA^+, SB^+)$ ein h-Winkel, PQ eine h-Gerade und H eine von PQ berandete h-Halbebene. Dann gibt es genau einen zu $\angle(SA^+, SB^+)$ kongruenten h-Winkel $\angle(PQ^+, PR^+)$ mit $R \in H$.

Axiom IV/3: Für jeden h-Winkel $\angle(SA^+, SB^+)$ gibt es eine h-Bewegung, die SA^+ auf SB^+ abbildet und SB^+ auf SA^+.

Axiom V': Zu jeder h-Geraden g und zu jedem h-Punkt $P \notin g$ gibt es mindestens zwei h-Geraden h_1, h_2 mit $P \in h_1 \cap h_2$ und $g \cap h_1 = \emptyset = g \cap h_2$.

Die Quantifizierung der Welt kommuniziert nicht nur Zahlen von zweifelhaftem Wert, die drängt die Quantifizierten, sich ihren Kategorien anzupassen. Die Ergebnisse sind nicht selten schizophren: Seit Beginn der achtziger Jahre entscheiden Zahlen in Hochschul-Rankings darüber, welche Hochschule wie viel Geld bekommt, wer mit wem zusammenarbeitet und wohin es die besten Studierenden zieht. Wendy Espeland (Northwestern University) zitiert die typische Reaktion der Dekanate: "Wir wissen, dass die Rankings die falschen Kriterien haben, aber wir müssen dringend etwas tun, um unsere Position zu verbessern".
Manuela Lenzen, zitiert nach Frankfurter Allgemeine Zeitung vom 18. November 2013, gefunden in Forschung und Lehre, Heft 1 2014, S. 7