Zweck der folgenden Aufgabe war es, festzustellen, ob der Prüfling aus den Axiomen eine einfache Aussage herleiten kann.

Begründen Sie aus der Vorlesung die Aussage: "Es gibt ein gleichseitiges Dreieck." oder ausführlicher: "Es gibt drei Punkte A, B, $C \in \mathbb{E}$ mit der Eigenschaft: $d(A, B) = d(B, C) = d(C, A)$."

Gehen Sie dabei vor wie folgt:

a) Zeigen Sie: Es gibt zwei Punkte A, B mit dem Abstand $d(A, B) = 1$.

Lösung:

Nach Axiom II/2 gibt es zwei Punkte A, B mit Abstand $d(A, B) = 1$.

Aus der Vorlesung wissen wir: Die Strecke $\overline{AB}$ besitzt genau einen Mittelpunkt M (nach 3.2.2) mit $d(A, M) = d(M, B) = \frac{1}{2}$ und genau ein Mittellot $m = MP$ (nach 4.1.7 oder 4.1.17).

b) Zeigen Sie: Es gibt einen Punkt $C \in m$ mit der Eigenschaft $d(C, A) = d(A, B)$.

Lösung:

Da $d(A, M) = \frac{1}{2} < 1$, gibt es nach Axiom III/2 genau einen Punkt $C \in MP^+$, für den gilt: $d(A, C) = 1$.

c) Zeigen Sie: $d(B,C) = d(A,B)$.

Lösung:

$\triangle AMC \cong \triangle BMC$ nach **sws**, da
$d(A,M) = d(B,M) \qquad (= \frac{1}{2})$,
$d(M,C) = d(M,C)$ und
$\angle AMC = \angle BMC \qquad = R$.
Folglich ist $d(B,C) = d(C,A) = d(A,B)$.

alternative Lösung:

Nach dem Fahnensatz 2.2.3 gibt es genau eine Bewegung σ, die M auf M abbildet, MA^+ auf MB^+ und die durch MA begrenzte Halbebene, in der C liegt auf dieselbe Halbebene.

Für σ gilt nach 1.5.21 und wegen Axiom III/2: $\sigma(A) = \sigma(B)$ und $\sigma(B) = \sigma(A)$. Da $\sigma(\overline{AB}) = \overline{AB}$, ist $\sigma(m) = m$.

Nach Voraussetzung über σ ist daher $\sigma(MC^+) = MC^+$, also $\sigma(C) = C$ (wegen Axiom III/2) und damit $d(B,C) = d(\sigma(A), \sigma(C)) = d(A,C) = 1$.

Zweck der folgenden Aufgabe war es, festzustellen, ob der Prüfling aus den Axiomen eine einfache Aussage herleiten kann.

Seien $P, Q, R \in \mathbb{E}$ drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Die Gerade $g := PQ$ teilt $\mathbb{E} \setminus g$ nach Axiom IV/1 in zwei Halbebenen $H_1 \setminus g$ und $H_2 \setminus g$. Der Punkt P teilt $PR \setminus \{P\}$ in zwei Halbgeraden $PR^+ \setminus \{P\}$ und $PR^- \setminus \{P\}$.
Zeigen Sie: $PR^+ \subset H_1$ oder $PR^+ \subset H_2$.

Lösung:

Annahme: PR^+ nicht Teilmenge von H_1 und PR^+ nicht Teilmenge von H_2.

Dann gibt es $A, B \in PR^+$ mit $A \in H_2 \setminus g$ und $B \in H_1 \setminus g$.

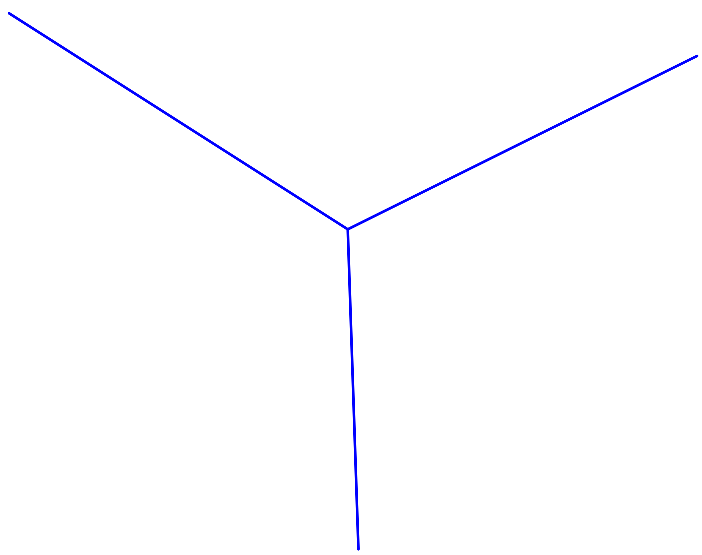
Nach Axiom IV/1 gilt dann: $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset$.

Da $\overline{AB} \subset PR$ und $PR \cap g = \{P\}$, ist dann $P \in \overline{AB}$, was nach Axiom III/1 einen Widerspruch liefert zu $A, B \in PR^+ \setminus g$.

Zweck der folgenden Aufgabe war es, festzustellen, ob der Prüfling eine aus den Übungen bekannte Konstruktion richtig durchführen kann.

Gegeben seien die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in der Zeichenebene. Konstruieren Sie ein Dreieck mit diesen drei Mittelsenkrechten.

Geben Sie den Verlauf der Konstruktion durch Konstruktionsangaben (Rechtwinkelzeichen, Farbsäume u.ä.) verständlich an, notfalls auch durch eine kurze textliche Erläuterung.



Zweck der folgenden Aufgabe war es, festzustellen, ob der Prüfling einen bekannten Sachverhalt richtig und in sich abgeschlossen darstellen kann.

Beweisen Sie den Satz des Pythagoras so, dass der Beweis für Schüler geeignet (und richtig!) ist.