Grafik 2

Transformation : $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$

euklidische Ebene ε

$a: \ a_0 + a_1 x + a_2 y = 0$

$b: \ b_0 + b_1 x + b_2 y = 0$

$a: 1.5 - 1x + 1y = 0$

$b: 0.5 - 1x - 1.5y = 0$

Schnittpunkt $S = (S_x, S_y)$
nach Cramerscher Regel

$$S_x = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = 1.1$$

$$S_y = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = -0.4$$

☑ projektiv erweiterte euklidische Ebene $\varepsilon : x_0 = 1$

$a: \ a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a}^T \vec{x} = 0$

$b: \ b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 = 0 \Leftrightarrow \vec{b}^T \vec{x} = 0$

Mit den homogenen Geradenkoordinaten

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

erhält man die homogenen Punktkoordinaten

$$\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ b_0 a_2 - b_2 a_0 \\ a_0 b_1 - a_1 b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.75 \\ -1 \end{pmatrix}$$

des Schnittpunkts $S(\vec{s})$ der Geraden a und b und durch Rücktransformationen die affinen Koordinaten von $S = (\frac{s_1}{s_0}, \frac{s_2}{s_0}) = (1.1, -0.4)$

Für $s_0 = 0$ ist S ein Fernpunkt in Richtung $(0, -a_2 . a_1)^T$ der parallelen Geraden a und b.

☑ Ebenen einblenden

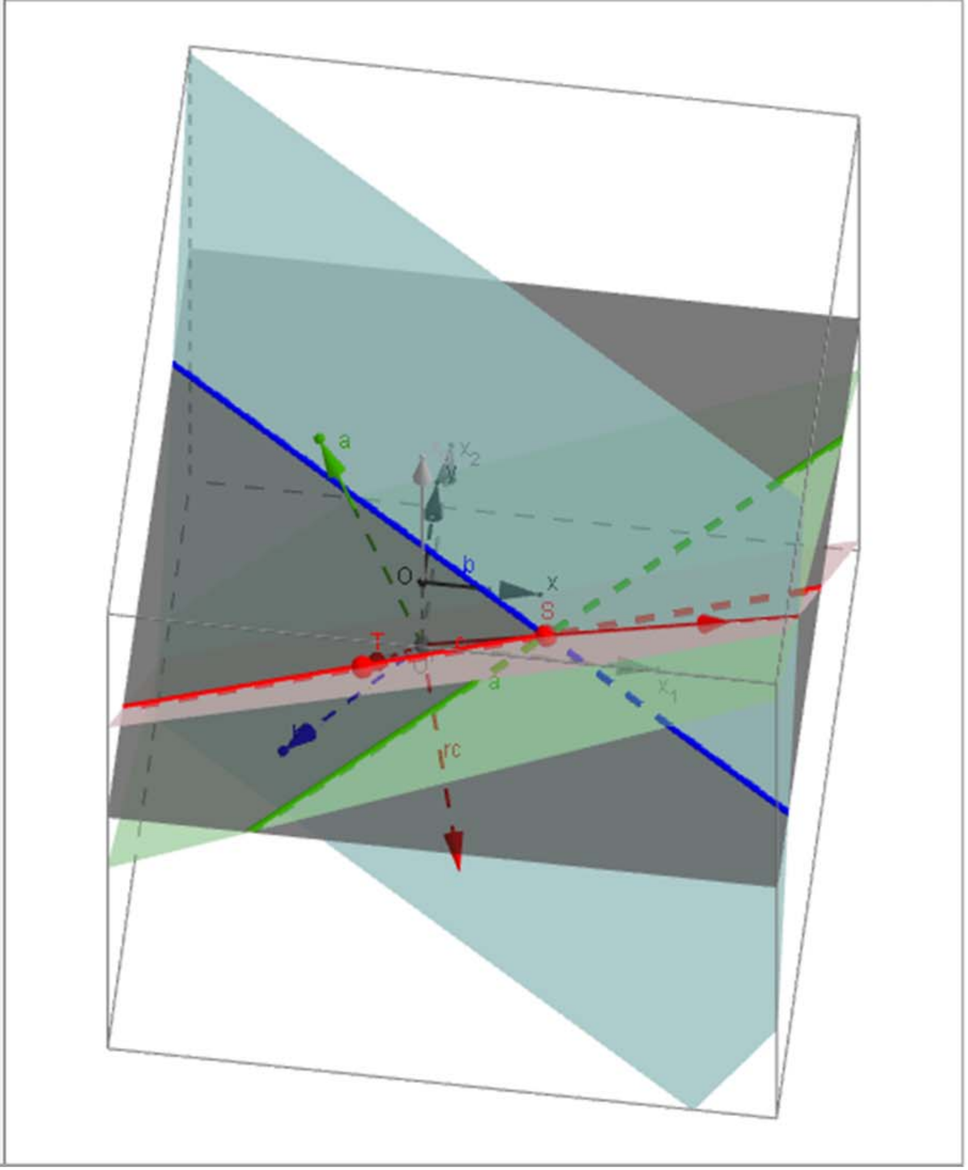
Mit Hilfe des Schiebereglers p kann man b parallel zu a drehen. p = 0

☑ umgekehrt erhält man die homogenen Geradenkoordinaten $\vec{c}$ der Verbin– dungsgeraden $c: c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \vec{c}^T \vec{x} = 0$ von $S(\vec{s})$ und $T(\vec{t})$ als

$$\vec{c} = \vec{s} \times \vec{t} = \frac{1}{2.5} \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.75 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -0.4 \\ -0.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.15 \\ 0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

also nach Rücktransformation $\quad c: \ -1.15 + 0.5x - 1.5y = 0$

3D Grafik



Grafik 2

Die homogenen Koordinaten

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 1.12 \\ 1.97 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{q} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.48 \\ -0.4 \\ 1.84 \end{pmatrix}$$

legen in der Ebene $x_0 = 1$ die Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9 \\ 1.58 \end{pmatrix} \text{ und } Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.27 \\ 1.24 \end{pmatrix} \text{ fest}$$

und spannen die Ebene $\gamma: \ \vec{x} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}$ durch O auf, welche die Ebene $x_0 = 1$ in der Verbindungsgeraden $g = PQ$ schneidet. (Für $p_0 = 0$ ist P der Fernpunkt in Richtung $(0, p_1, p_2)^T$, analoges gilt für Q)

A Fernpunkt   Zurück

☑ X auf g=PQ

$$\begin{aligned}
X(\vec{x}) \in g \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{x} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q} \ \text{ homogene Koordinaten von } X \in g \\
&\Leftrightarrow \quad \vec{x},\ \vec{p},\ \vec{q} \ \text{ sind linear abhängig} \\
&\Leftrightarrow \quad \det(\vec{p}, \vec{q}, \vec{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\vec{p} \times \vec{q})^T\vec{x} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \vec{n}^T\vec{x} = 0 \ \text{ mit } \ \vec{n} := \vec{p} \times \vec{q}
\end{aligned}$$

$\vec{n}$ sind die homogenen Geradenkoordinaten von $g = PQ$

3D Grafik