5 Zur Geometrie euklidischer Bewegungen

5.1 Erinnerung an 3.3.3

Eine Bewegung eines euklidischen Raumes wird bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems beschrieben durch

$$\vec{x}\,' = U\vec{x} + \vec{w} \qquad (U^T U = E)$$

mit orthogonaler Matrix U und $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$.
E ist die Einheitsmatrix.

det$(U) > 0$ . . . **gleichsinnige Bewegung**
det$(U) < 0$ . . . **ungleichsinnige Bewegung, Umlegung**

$U^T U = E \Rightarrow$ Die Spalten von U sind orthonormiert.
$U^T U = E \Rightarrow U^T = U^{-1} \Rightarrow UU^T = E \Rightarrow$ Die Zeilen von U sind orthonormiert.

$U^T U = E \Rightarrow \det(U^T U) = \det(E) = 1$.
Mit dem Determinantenmultiplikationssatz folgt: $\det(U^T)\det(U) = 1$
Folglich ist

$$\det(U) = \pm 1.$$

Also:

$$U^T U = E \Rightarrow \det(U) = \pm 1$$

Die Umkehrung gilt nicht!

5.2 Euklidische Bewegungen in der Dimension $n = 1$ und $n = 2$

$n = 1 \Rightarrow U = (1)$ oder $U = (-1)$.

$n = 2:$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}; U^T U = E \Rightarrow$$

$u_{11}^2 + u_{21}^2 = 1 \Rightarrow -1 \leq |u_{11}| \leq 1 \Rightarrow$
$u_{11} = \cos\varphi \Rightarrow u_{21} = \pm\sin\varphi$

Tafelskizze: Graph von sin und von cos

Ist $u_{21} = -\sin\varphi$, so gilt für $\psi := 2\pi - \varphi$:
$u_{11} = \cos\psi, u_{21} = \sin\psi$.

Also gilt: Es gibt ein φ, so dass gilt:

$$u_{11} = \cos\varphi, u_{21} = \sin\varphi.$$

Weiter:

$U^T U = E \Rightarrow u_{11}u_{12} + u_{21}u_{22} = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

mit $t = \pm 1$ (da $u_{12}^2 + u_{22}^2 = 1$).

$t = 1 \Rightarrow U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$
... **Drehmatrix**

$t = -1 \Rightarrow U = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \qquad (*)$
... **Spiegelungsmatrix**

Welche Richtung hat die **Spiegelungsachse**?
Sie bleibt fest, sogar punktweise.

Ges.: Eigenvektor (EV) von U zum Eigenwert (EW) 1:

$$U\vec{x} = \vec{x} \Leftrightarrow (U - E)\vec{x} = \vec{o}$$

$$\begin{array}{cccccc} (\cos\varphi - 1) & x_1 & + & \sin\varphi & x_2 & = 0 \\ \sin\varphi & x_1 & - & (\cos\varphi + 1) & x_2 & = 0 \end{array}$$

Zweite Zeile: $x_1 = \cos\varphi + 1, x_2 = \sin\varphi$ ist eine Lösung.
Erste Zeile: ist erfüllt.

Satz: Bei einer Spiegelung der Ebene mit der Abbildungsmatrix (*) hat die Spiegelungsachse einen Richtungsvektor der Gestalt

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi + 1 \\ \sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Welchen Winkel schließt die Spiegelungsachse mit der x_1-Achse ein?

Das kann man rechnen, wenn man trigonometrische Formeln kennt.

Besser. Geometrische Überlegung:

Wohin kommt (z.B.) die x_1-Achse?

Drehung um O durch den Winkel φ, anschließend Spiegelung am Bild der x_1-Achse.

Insgesamt: Drehung um O durch den Winkel φ.

Welche Spiegelung bewirkt das?

Spiegelung an einer Geraden, die mit der x_1-Achse den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ einschließt.

Satz: Bei einer Spiegelung der Ebene mit der Abbildungsmatrix (*) schließt ein Richtungsvektor der Spiegelungsachse mit der positiven x_1-Achse einen Winkel $\frac{\varphi}{2}$ ein.

5.3 EWe von Drehmatrizen für $n = 3$

Vor.: U eine 3×3-Drehmatrix,
also $U^T U = E, \det(u) = 1$.

Beh.: U besitzt die EWe $\lambda_1 = 1$,
$\lambda_2 = e^{i\varphi}, \lambda_3 = e^{-i\varphi}, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$.

Bew.: Jede 3×3-Matrix U besitzt EWe $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$.

(i) Das Produkt der EWe von U ist die Determinante von $U \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = 1$

(ii) U und U^T besitzen dieselben EWe.
U und U^{-1} besitzen inverse EWe.
Da $U^T = U^{-1}$ gilt also:

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \frac{1}{\lambda_3}\} \Rightarrow$$

Ein EW ist invers zu einem anderen und der dritte gleich 1,
oder alle drei EWe sind selbstinvers $\in \{1, -1\}$.

o.E.

$$\lambda_1 = 1.$$

Man beachte dabei (i)!.

(iii)

$$U\vec{x} = \lambda\vec{x}, \vec{x} \neq \vec{o} \Rightarrow$$

$$\overline{U\vec{x}}^T U\vec{x} = \overline{\lambda}\lambda\overline{\vec{x}}^T\vec{x} \Rightarrow$$

$$\overline{\vec{x}}^T\overline{U}^T U\vec{x} = \overline{\lambda}\lambda\overline{\vec{x}}^T\vec{x} \Rightarrow$$

Da U reell und orthogonal, folgt:

$$\overline{\vec{x}}^T\vec{x} = \overline{\lambda}\lambda\overline{\vec{x}}^T\vec{x} \overset{\vec{x}\neq\vec{o}}{\Rightarrow} \overline{\lambda}\lambda = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$$

Also ist

$$\lambda_2 = e^{i\varphi}, \lambda_3 = \frac{1}{\lambda_2} = e^{-i\varphi} \quad (\varphi \in [0, \pi]).$$

Eine berühmte Formel von Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

Bem.: Zu jeder 3×3-Drehmatrix gibt es einen EV zum EW 1, also einen 1-dim. UVR aus Fixelementen.

Frage: Was bedeutet das φ im EW $e^{i\varphi}$?

Versuch: Die EWe sind EWe der Abbildung, nicht nur der Matrix. Sie sind dieselben, wenn man eine andere ONB verwendet.

Dritter Basisvektor ein EV zum EW 1,
ein Fixvektor. $\Rightarrow$

$$U = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das ist eine Drehmatrix, Drehachse x_3-Achse, Drehwinkel α.

EWe von U? Interessant: EWe $\neq 1$!

$$0 = \det \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} \cos\alpha-\lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cdot\lambda + \lambda^2 + \sin^2\alpha) =$$

$$= \underbrace{(1-\lambda)}_{\neq 0}(1-2\cos\alpha\cdot\lambda+\lambda^2) \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} =$$

$$= \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha =$$

$$= e^{\pm i\alpha}$$

Ergebnis: $\pm\varphi$ im EW $e^{i\varphi}$ einer Drehmatrix ist der zugehörige Drehwinkel.

5.4 Bestimmung des Drehwinkels einer Drehmatrix U

$\vec{x}^* = U\vec{x}$ mit $U^TU = E$, $\det U = 1$

nicht orientiert: EWe sind basisunabhängig. Wie bestimmt man φ aus

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: \tilde{U}$$

$\text{spur}(\tilde{U}) - 1 = 2\cos\varphi$
Auch die Spur einer Matrix,
die Summe der Diagonalelemente,
ist basisunabhängig.

Also gilt allgemein:

$$\varphi = \arccos\frac{\text{spur}(U) - 1}{2} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \quad (*)$$

orientiert: Sei U eine Drehmatrix mit EV $\vec{r}$ zum EW 1, $|\vec{r}| = 1$.
Dadurch ist $\vec{r}$ **zwei**deutig bestimmt.
Durch die Wahl von $\vec{r}$ wird die Drehachse a orientiert.
Für den Drehwinkel δ gilt zunächst:

$$\delta = \pm\varphi \qquad\qquad (\cos\delta = \cos\varphi)$$

$$\text{o. E.}: -\pi < \delta \leq \pi$$

Ermittlung des Vorzeichens von δ:

Einfache Spezialfälle:
$\varphi = 0 \Rightarrow \delta = 0$ (Identität)
$\varphi = \pi \Rightarrow \delta = \pi$ (180°-Drehung um a = Achsenspiegelung an a)

Sei nun $0 < \varphi < \pi$:

Wir betrachten einen (beliebigen) Vektor $\vec{o} \neq \vec{s} \perp \vec{r}$

$$(\vec{s}^T \vec{r} = 0).$$

$\delta = +\varphi$ (Rechtsdrehung um die orientierte Achse a durch den Winkel φ)
$\Leftrightarrow$ $(\vec{r}, \vec{s}, U\vec{s})$ Rechtssystem
$\Leftrightarrow$ $\det(\vec{r}, \vec{s}, U\vec{s}) > 0$

$\delta = -\varphi$ (Linksdrehung um die orientierte Achse a durch den Winkel φ)
$\Leftrightarrow$ $(\vec{r}, \vec{s}, U\vec{s})$ Linkssystem
$\Leftrightarrow$ $\det(\vec{r}, \vec{s}, U\vec{s}) < 0$

Umorientierung der Drehachse ($\vec{r} \to -\vec{r}$) bewirkt Änderung des Drehsinns ($\delta \to -\delta$).

Durch U ist φ gegeben, aber nicht δ!