

4.3 Euklidische Geometrie mit Skalarprodukt und Vektorprodukt

Kann man zwei Vektoren miteinander multiplizieren?

4.3.1 Zerlegung einer Kraft, Skalarprodukt

Tafelskizze: Wagen wird mit einer Schnur schräg nach oben auf horizontaler Bahn gezogen: Kraft \vec{F} , Fahrtrichtung \vec{r} mit $|\vec{r}| = 1$.

Die Kraft, die den Wagen in Richtung \vec{r} zieht, hat den Betrag

$$\pm |\vec{F}| \cos \varphi,$$

wobei $\varphi = \angle(\vec{F}, \vec{r})$.

Ist z.B. $\vec{F} * \vec{r} := |\vec{F}| \cos \varphi$ ein "schönes" Produkt?

Nein: Es ist nicht definiert für alle \vec{r} , und es ist nicht symmetrisch.

Aber:

$$\vec{F} \circ \vec{r} := |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot \cos \varphi$$

ist definiert für alle Vektoren \vec{F} , \vec{s} , und \circ ist symmetrisch.

Offenbar gilt:

$$(\lambda \cdot \vec{F}) \circ \vec{s} = \lambda \cdot (\vec{F} \circ \vec{s})$$

Warum gilt das auch für negative λ ?

$\vec{F} \circ \vec{s}$ heißt das **Skalarprodukt** der beiden Vektoren \vec{F} und \vec{s} .

4.3.2 Geometrische Deutung

$\vec{F} \circ \vec{s}$ ist

$|\vec{s}|$ -mal (\pm die Länge der Normalprojektion von \vec{F} auf eine Gerade mit Richtung \vec{s}) und $|\vec{F}|$ -mal (\pm die Länge der Normalprojektion von \vec{s} auf eine Gerade mit Richtung \vec{F})

Es gilt:

$$\vec{F} \circ \vec{s} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{o} \text{ oder } \vec{s} = \vec{o} \text{ oder } \vec{F} \perp \vec{s}.$$

4.3.3 Distributivität

Tafelskizze: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$, \vec{s} ,
Risse von Lotebenen zu \vec{s}

$\vec{s} \parallel$ Zeichenebene

Damit ist

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \circ \vec{s} = \vec{F}_1 \circ \vec{s} + \vec{F}_2 \circ \vec{s}$$

4.3.4 Anschluss an die Lineare Algebra (LA)

Nach 4.3.1 und 4.3.3 ist \circ eine Bilinearform (**BLF**),
die nach 4.3.1 symmetrisch ist,
und die offenbar positiv definit ist:

$$\vec{F} \circ \vec{F} \geq 0, \quad \vec{F} \circ \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F} = \vec{o}.$$

Also ist \circ ein Skalarprodukt im Sinn der LA.

Schreibweisen:

$$\vec{F} \circ \vec{s} =: \langle \vec{F}, \vec{s} \rangle =: \vec{F} \cdot \vec{s} =: \vec{F}\vec{s}.$$

$$\vec{F}^2 := \vec{F} \circ \vec{F}$$

$$\|\vec{F}\| := |\vec{F}| := \sqrt{\vec{F}^2}$$

heißt die **Länge** oder die **Norm** oder der **Betrag** von \vec{F} .

4.3.5 Kanonische Darstellung

Sei $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ eine Orthonormalbasis (**ONB**), d.h.

$$\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$$

und

$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$$

Dann gilt für Vektoren \vec{x}, \vec{y} :

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$$

$$\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3$$

mit $x_i, y_i \in \mathbb{R} (i = 1, 2, 3)$ und

$$\vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

4.3.6 Koordinatenvektoren bezüglich einer ONB

Sind $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ Koordinatenvektoren **bezüglich einer ONB (!)**, so ist

$$\vec{x}\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \vec{x}^T\vec{y} = \vec{y}^T\vec{x}.$$

4.3.7 Das Vektorprodukt im \mathbb{R}^3

$\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Dann definiert man:

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} := \\ &:= \begin{pmatrix} \det \begin{pmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} v_3 & w_3 \\ v_1 & w_1 \end{pmatrix} \\ \det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2w_3 - v_3w_2 \\ v_3w_1 - v_1w_3 \\ v_1w_2 - v_2w_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das ist das **Vektorprodukt** oder **Kreuzprodukt** (oder **äußere Produkt**) der Vektoren \vec{v} und \vec{w} .

Nach dem Determinantenentwicklungssatz von Laplace gilt für alle $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{x}^T (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{x}\vec{v}\vec{w})$$

Satz: Für alle $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist

$$\vec{x}^T (\vec{v} \times \vec{w})$$

das (orientierte) Volumen des von $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten **Spats = Parallelepipeds**.

Daraus folgt speziell:

$$\vec{v}^T (\vec{v} \times \vec{w}) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (*)$$

und

$$\vec{w}^T (\vec{v} \times \vec{w}) = 0 \quad (**)$$

Aus (*) und (**):

Satz: Für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{v} \times \vec{w} \perp \vec{v}, \vec{w}.$$

Wählt man für \vec{x} speziell einen Einheitsvektor in Richtung von $\vec{v} \times \vec{w}$, so ist

$$\vec{x}^T (\vec{v} \times \vec{w})$$

1-mal die (orientierte) Grundfläche des von $\vec{x}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Spats. Daher gilt:

Satz: Für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, die Koordinatenvektoren bezüglich einer ONB sind, ist $\|\vec{v} \times \vec{w}\|$ die Fläche des von \vec{v}, \vec{w} aufgespannten Parallelogramms.

Satz: Für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

Bew.: Definition anschauen!

Satz: Für alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$$

Bew.: nachrechnen!

Satz: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$(\lambda \vec{v}) \times \vec{w} = \lambda \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Bew.: Definition anschauen!

Satz: Sind \vec{v} , \vec{w} Koordinatenvektoren bzgl. einer ONB, so gilt:

$$\begin{aligned}\|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 &= \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \cos^2 \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \\ &= \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2 \sin^2 \angle(\vec{v}, \vec{w})\end{aligned}$$

Eine geometrische Interpretation, wenn \vec{v} , \vec{w} Koordinatenvektoren bezüglich einer ONB:

$\vec{v} \times \vec{w}$ ist ein Vektor $\perp \vec{v}, \vec{w}$

mit der Länge $\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \sin \angle(\vec{v}, \vec{w})$.

Davon gibt es zwei!

Von jetzt an werde eine Rechts-ONB vorausgesetzt. Dann gilt allgemein:

$\vec{x}^T (\vec{v} \times \vec{w}) = \det(\vec{x} \vec{v} \vec{w}) = \det(\vec{v} \vec{w} \vec{x}) > 0 \Leftrightarrow$
 $\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.

Daraus folgt:

$$\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{v} \times \vec{w})^2 = \|\vec{v} \times \vec{w}\|^2 > 0$$

falls \vec{v}, \vec{w} l.u.

Satz: $\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, falls \vec{v}, \vec{w} l.u.

4.3.8 Beispiele (bzg. kartesischer Rechts-KSe)

a) Geraden $g : \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$
 $h : \vec{x} = \vec{b} + s\vec{w}, \quad s \in \mathbb{R}$

g nicht parallel zu h

Ges.: Abstand $d(g, h)$

$$d(g, h) = \frac{|\det(\vec{v}, \vec{w}, \vec{b} - \vec{a})|}{|\vec{v} \times \vec{w}|}$$

Warum?

Projektion $\perp \vec{v} \times \vec{w}$,

Projektionsrichtung nicht parallel zu g ,
nicht parallel zu h

Tafelskizze!

$$d(g, h) =$$

|Normalprojektion von $\vec{b} - \vec{a}$ auf $\vec{v} \times \vec{w}$ |

$$= |(\vec{b} - \vec{a}) \frac{\vec{v} \times \vec{w}}{|\vec{v} \times \vec{w}|}|$$

b) $\Delta A(\vec{a})B(\vec{b})C(\vec{c})$ im dreidim. Raum

Ges.: Dreiecksfläche F :

$$F = \frac{1}{2} |(\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a})|$$

Warum?

Tafelskizze

Projektion $\perp ABC$

Zwei Deutungen:

halbe Parallelogrammfläche oder

Länge einer Höhe ist

$$|\vec{c} - \vec{a}| \sin \angle(\vec{c} - \vec{a}, \vec{b} - \vec{a})$$

c) $\Delta A(\vec{a})B(\vec{b})C(\vec{c})$ in der Ebene

Ges.: Dreiecksfläche F :

$$F = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Warum? (Sind das homogene Koordinaten?)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vec{a} & \vec{b} - \vec{a} & \vec{c} - \vec{a} \end{pmatrix} = \\ \det(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a})$$

Nach **b)** ist

$$F = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} \vec{b} - \vec{a} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \vec{c} - \vec{a} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \\ = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \det(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a}) \end{pmatrix} \right| = \\ = \frac{1}{2} |\det(\vec{b} - \vec{a}, \vec{c} - \vec{a})|$$

Achtung: (*) liefert eine **orientierte Dreiecksfläche**

d) Brennpunkte von Ellipsen

Geg.: Zwei Pkte $F_1, F_2, F_1 \neq F_2$, in der euklid. Ebene

Ges.: Menge aller Pkte $X(x, y)$, für die gilt:

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$$

mit $a \in \mathbb{R}$ fest

Tafelskizze mit kart. xy -KS,
 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ mit $c > 0, X(x, y)$

Notwendig: $2a \geq d(F_1, F_2)$

$$\begin{aligned} 2a &= d(X, F_1) + d(X, F_2) = \\ &= \sqrt{(x - (-c))^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} \\ (2a - \sqrt{(x - (-c))^2 + y^2})^2 &= (\sqrt{(x - c)^2 + y^2})^2 \\ 4a^2 - 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2 &= \\ &= (x - c)^2 + y^2 \\ 4a^2 + 4xc &= 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} \\ 16a^4 + 32a^2xc + 16x^2c^2 &= 16a^2((x + c)^2 + y^2) \end{aligned}$$

Division durch 16 und weitere Umformung ergibt:

$$a^4 + 2a^2xc + x^2c^2 = a^2((x + c)^2 + y^2)$$

$$a^4 + x^2c^2 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$a^2 \underbrace{(a^2 - c^2)}_{=:b^2} = (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 \quad | : a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die gesuchte Punktmenge ist eine **Ellipse** *e*.

Was ist *b*?

Tafelskizze

$$a^2 = b^2 + c^2 \text{ (Pythagoras)}$$

b ist die **kleine Halbachse** von *e*

a ist die **große Halbachse** von *e*

$F_1, F_2 \dots$ **Brennpunkte** von *e*

Die soeben gezeigte Eigenschaft gibt Anlass zur **Gärtnerkonstruktion** der Ellipse.

Mitteilung ohne Beweis:

Der Scheitelkrümmungskreis einer Ellipse
in einem $\left\{ \begin{array}{l} \text{Haupt} \\ \text{Neben} \end{array} \right\}$ scheitel hat den
Radius $\left\{ \begin{array}{l} \frac{b^2}{a_2} \\ \frac{a^2}{b} \end{array} \right\}$.

Tafelskizze: Krümmungskreisconstruction

Gedächtnisstütze: Dimension Länge!