4.2 Zum Dualitätsprinzip

4.2.1 Projektivitäten $P^n \to P^n$

Aus 2.2.9 wissen wir: Eine Abb. $P^n \to P^n$ ist eine Projektivität $\Leftrightarrow$
Jedes Bild einer Geraden ist eine Gerade. ($n \geq 2$!)

Das bedeutet für Abbildungen in den Dualraum $\widehat{P}^n$:

Eine Abb. $P^2 \to \widehat{P}^2$ ist eine Projektivität
$\Leftrightarrow$
Jedes Bild einer Geraden ist die Menge aller Geraden durch einen Punkt.

Eine Abb. $P^3 \to \widehat{P}^3$ ist eine Projektivität
$\Leftrightarrow$
Jedes Bild einer Geraden ist die Menge aller Ebenen durch eine Gerade.

Aus 3.2.3 kennen wir die Koordinatendarstellung von Projektivitäten: Sie besagt speziell:

Eine Abbildung $\kappa : P^n \to \widehat{P}^n$ ist eine Projektivität $\Leftrightarrow$
Für die homogenen Koordinatenvektoren
$\vec{x}$ von $X \in P^n$ und
$\vec{u}$ von $U = \kappa X \in \widehat{P}^n$ gilt:

$\vec{u} = A\vec{x}$ mit einer $(n+1, n+1)-$Matrix A mit $\det A \neq 0$.

4.2.2 Polarität bezüglich einer Quadrik oder bezüglich eines Kegelschnitts

Ist $\vec{x}^T A\vec{x} = 0$ mit $A \neq O$, $A^T = A$, die Gleichung einer Quadrik Q oder eines Kegelschnitts k, so heißen die zwei Punkte $X(\vec{x})$ und $Y(\vec{y})$ **zueinander polar bezüglich** Q oder **bezüglich** k $:\Leftrightarrow \vec{x}^T A\vec{y} = 0$.

Warum darf man schreiben "zueinander" polar?

4.2.3 Polarebene und Polare

Ist $\vec{x}^T A\vec{x} = 0$ mit $A \neq O$, $A^T = A$, die Gleichung einer Quadrik Q oder eines Kegelschnitts k, und ist

$$A\vec{p} = \vec{o} \text{ mit } \vec{p} \neq \vec{o},$$

so ist $P(\vec{p}) \in Q$ oder $P(\vec{p}) \in k$, und P heißt ein **singulärer Punkt von** Q oder **von** k.

Ist $P(\vec{p}) \in Q$ oder $P(\vec{p}) \in k$ und $A\vec{p} \neq \vec{o}$, so heißt P ein **regulärer Punkt von** Q oder **von** k.

Ist $P(\vec{p})$ kein singulärer Punkt von Q,
also ein regulärer Punkt von Q oder kein Punkt von Q,
so ist die Menge aller zu P polaren Punkte gegeben durch die Gleichung

$$\underbrace{\vec{p}^T A}_{=:\vec{u}^T \neq \vec{o}^T} \quad \vec{x} = 0,$$

also eine Ebene des P^3, die **Polarebene von** P **bezüglich** Q.

Ist $P(\vec{p})$ kein singulärer Punkt von k, so ist die Menge aller zu P polaren Punkte gegeben durch die Gleichung

$$\vec{p}^T A \vec{x} = 0,$$

also eine Gerade des P^2, die **Polare von** P **bezüglich** k.

4.2.4 Polarität als Realisierung des Dualitätsprinzips

Ist $\vec{x}^T A\vec{x} = 0$ mit $A \neq O$, $A^T = A$, die Gleichung einer nichtentarteten Quadrik Q oder eines nichtentarteten Kegelschnitts k, so ist $\det A \neq 0$ und $A\vec{p} \neq \vec{o}$ für alle Punkte $P(\vec{p})$.

Die Abbildung $P(\vec{p}) \mapsto U(\vec{u})$ mit $\vec{u} = A\vec{p}$ ist bijektiv. Wir interpretieren $\vec{u}$ als (homogenen) Koordinatenvektor einer Ebene oder einer Geraden.

Die Gleichung $\vec{p}^T A\vec{x} = 0$ bestimmt für jeden Punkt $P(p)$ die Polarebene oder die Polare $U = \Gamma_P$ von P bezüglich Q oder k.

Ist Q eine nichtentartete Quadrik oder k ein nichtentarteter Kegelschnitt, so ist die Polarität bezüglich Q oder bezüglich k, also die Abbildung

$$\text{Punkt} \mapsto \text{Polarebene}$$

oder

$$\text{Punkt} \mapsto \text{Polare}$$

eine Realisierung des Dualitätsprinzips.

4.2.5 Polarebene als Tangentenebene einer ovalen Quadrik

Beh.: Ist Q eine ovale Quadrik und ist $P(\vec{p}) \in Q$, so ist $\Gamma_P \cap Q = \{P\}$.

Bew.: Wir verwenden die NF:

$$Q : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \qquad (1)$$

$$\Gamma_P : p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2 - p_3x_3 = 0 \qquad (2)$$

mit

$$p_0^2 + p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 = 0 \qquad (3)$$

Aus (3) folgt: $p_3 \neq 0$.
Aus (2), (3):

$$x_3 = \frac{1}{p_3}(p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2) =$$

$$\pm\frac{p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2}{\sqrt{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2}}$$

Einsetzen in (1):

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = \frac{(p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2)^2}{p_0^2 + p_1^2 + p_2^2}$$

$$(p_0^2+p_1^2+p_2^2)(x_0^2+x_1^2+x_2^2) = (p_0x_0+p_1x_1+p_2x_2)^2$$

Aber: Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung besagt:

$$(p_0x_0+p_1x_1+p_2x_2)^2 \leq (p_0^2+p_1^2+p_2^2)(x_0^2+x_1^2+x_2^2)$$

Gleichheit gilt nur, wenn (p_0, p_1, p_2) und (x_0, x_1, x_2) la, also (mit (2), (3)), wenn $X(\vec{x}) = P(\vec{p})$.

Allgemein heißt die Polarebene bezüglich einer Quadrik Q eines regulären Quadrikpunktes $P \in Q$ die **Tangentenebene von Q in P**.

Die Tangentenebene einer ovalen Quadrik in einem Quadrikpunkt enthält genau den einen Quadrikpunkt.

Die Tangentenebene einer ringartigen Quadrik Q in einem Quadrikpunkt P enthält von Q genau den Punkt P und die beiden erzeugenden Geraden von Q durch P.

Die Polare eines regulären Punktes P eines Kegelschnitts k bezüglich k ist die **Tangente** von k in P.

Tafelskizze: Polare eines Punktes P außerhalb k, eines Punktes $R \in k$, eines Punktes T im Inneren von k

4.2.6 Dualisierung einer nichtentarteten Quadrik Q in P^3

Zur Dualisierung einer nichtentarteten Quadrik Q verwenden wir speziell die Polarität an Q. (nach 4.2.4) Dann gilt:

Den Punkten von Q entsprechen die Tangentenhyperebenen von Q.

Allgemeiner gilt:

Satz: Sei Q eine nichtentartete Quadrik. Dann ist dual zu Q die Menge aller Tangentenebenen an eine Quadrik $\hat{Q}$, die dieselbe Normalform hat wie Q.

Der Satz ist so formuliert, dass er unabhängig ist von der Realisierung des Dualitätsprinzips.