2.2.4 Harmonische Lage von vier Punkten auf einer Geraden

Tafelskizze

Geg.: ebenes Vierseit $PQRS$ mit den Seiten $p := PQ$, $q := QR$, $r := RS$, $s := SP$
Schnittpunkte der Gegenseiten
$p \cap r =: \{A\}$, $q \cap s =: \{B\}$
Schnittpunkte von AB mit den Diagonalen
$AB \cap QS =: \{C\}$, $AB \cap PR =: \{D\}$
Dann heißen die vier Punkte A, B, C, D (in dieser Reihenfolge) **in harmonischer Lage**.

Satz: Sind A, B, C, D in harmonischer Lage, so auch A, B, D, C sowie B, A, C, D und B, A, D, C.

Bew.: Vertauschen von P mit S und Q mit R ändert A und B nicht, vertauscht aber C und D.
Vertauschen von Q mit S ändert C und D nicht, vertauscht aber A und B.

2.2.5 Doppelverhältnis (DV) von vier Punkten auf einer Geraden

Seien A, B, C, D vier verschiedene eigentliche Punkte auf einer Geraden. Dann heißt

$$\text{DV}(ABCD) := \frac{d(A,C)}{d(B,C)} : \frac{d(A,D)}{d(B,D)} \cdot \varepsilon$$

mit $\varepsilon = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array} \right\}$, falls das Punktepaar (A, B) das Punktepaar (C, D) $\left\{ \begin{array}{c} \text{nicht} \\ \end{array} \right\}$ trennt.

Tafelskizze

Seien A, B, C, D vier verschiedene eigentliche Punkte einer Geraden g und Z ein Punkt $\notin g$. Dann gilt:

$$\varepsilon \text{DV}(ABCD) = \frac{d(A,C)d(Z,g)}{d(B,C)d(Z,g)} : \frac{d(A,D)d(Z,g)}{d(B,D)d(Z,g)}$$

$d(A,C)d(Z,g)$ ist zweimal die Fläche von ΔACZ usw.

Für die folgenden Überlegungen sei die Reihenfolge der Punkte wie in der Tafelskizze.
Dann ist $\varepsilon = 1$, und es gilt:

$$\mathrm{DV}(ABCD) = \frac{d(A,Z)d(C,Z)\sin(\alpha+\beta)}{d(B,Z)d(C,Z)\sin\beta} : \frac{d(A,Z)d(D,Z)\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{d(B,Z)d(D,Z)\sin(\beta+\gamma)} \qquad (*)$$

DV($ABCD$) hängt (bis aufs Vorzeichen) nur ab von den Winkeln α, β und γ.

Aus (*) folgt:

(1) Bei anderem Z erhält man andere α, β, γ, aber (*) bleibt unverändert.

(2) Bei Zentralprojektion (aus Z) ändern sich α, β, γ nicht, also auch nicht (*), also auch nicht DV($ABCD$).

Permutationen der vier Punkte A, B, C, D:

$\mathsf{DV}(ABCD) =: \lambda$
$\mathsf{DV}(ABDC) = \frac{1}{\lambda}$
$\mathsf{DV}(ACBD) = 1 - \lambda$ (längere Rechnung)
$\mathsf{DV}(ACDB) =$
$\mathsf{DV}(ADBC) =$
$\mathsf{DV}(ADCB) =$

$\mathsf{DV}(BACD) =$
$\mathsf{DV}(BADC) =$
$\mathsf{DV}(BCAD) =$
$\mathsf{DV}(BCDA) =$
$\mathsf{DV}(BDAC) =$
$\mathsf{DV}(BDCA) =$

$\mathsf{DV}(CABD) =$
$\mathsf{DV}(CADB) =$
$\mathsf{DV}(CBAD) =$
$\mathsf{DV}(CBDA) =$
$\mathsf{DV}(CDAB) =$
$\mathsf{DV}(CDBA) =$

DV($DABC$) =
DV($DACB$) =
DV($DBAC$) =
DV($DBCA$) =
DV($DCAB$) =
DV($DCBA$) =

”Entartungsfälle”:

$D \to$ Fernpunkt $\Rightarrow$
DV($ABCD$) $=: \lambda \to \frac{d(A,C)}{d(B,C)} \cdot \varepsilon$

Das ist ein Teilverhältnis TV(ABC).
($\varepsilon = 1$, falls A, B auf derselben Seite von C.)

$A \to B \Rightarrow \lambda \to 1$
$A \to C \Rightarrow \lambda \to 0$
$A \to D \Rightarrow \lambda \to \infty$

$B \to C \Rightarrow \lambda \to \infty$
$B \to D \Rightarrow \lambda \to 0$

$C \to D \Rightarrow \lambda \to 1$

2.2.6 Konstruktion des vierten harmonischen Punktes D zu drei Punkten A, B, C

Tafelskizze

Geg.: Gerade g, darauf drei Punkte A, B, C

Ges.: Punkt D, so dass A, B, C, D in harmonischer Lage

Wähle Hilfsgerade durch A, darauf zwei Punkte P und S
Verbinde C mit P und B mit S:
Schnittpunkt R
Verbinde A mit R und B mit P:
Schnittpunkt Q
SQ schneidet g in D.

2.2.7 DV von vier Punkten in harmonischer Lage

Tafelskizze wie in 2.2.6

$PR \cap QS =: \{Z\}$
$BZ \cap QR =: \{B'\}$
$BZ \cap PS =: \{B''\}$

Projektion von g aus Z auf AP führt über:
$(A, B, C, D) \quad \rightarrow \quad (A, B'', P, S) \quad \Rightarrow$
$\mathrm{DV}(ABCD) = \mathrm{DV}(AB''PS)$

Projektion von AP aus B auf AQ führt über:
$(A, B'', P, S) \quad \rightarrow \quad (A, B', Q, R) \quad \Rightarrow$
$\mathrm{DV}(AB''PS) = \mathrm{DV}(AB'QR)$

Projektion von AQ aus Z auf g führt über:
$(A, B', Q, R) \quad \rightarrow \quad (A, B, D, C) \quad \Rightarrow$
$\mathrm{DV}(AB'QR) = \mathrm{DV}(ABDC)$

Insgesamt folgt:

$\lambda :=$ DV$(ABCD)$ = DV$(ABDC)$ =(nach 2.2.5)$= \frac{1}{\lambda} < 0$, da das Paar (A, B) das Paar (C, D) trennt.

$\lambda = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = -1$

Satz: Sind die vier Punkte A, B, C, D auf einer Geraden g in dieser Reihenfolge in harmonischer Lage, so ist

$$\mathrm{DV}(ABCD) = -1.$$

2.2.8 Eigenschaften von Kollineationen

Satz: Jede Kollineation κ bildet Ebenen auf Ebenen ab.

Bew.: Eine Ebene ε sei festgelegt durch zwei (einander schneidende) Geraden g, h.

Sei $P \in \varepsilon$.
Eine Hilfsgerade k mit $P \in k \subset \varepsilon$, die $g \cap h$ nicht enthält, schneide g, h in G, H.

Dann liegt $\kappa(P)$ auf $\kappa(GH) = \kappa(G)\kappa(H) \subset \kappa(g)\kappa(h) =: \varepsilon' \Rightarrow$

$\kappa(\varepsilon)$ ist enthalten in einer Ebene ε':

$\kappa(\varepsilon) \subset \varepsilon' \Rightarrow \varepsilon \subset \kappa^{-1}(\varepsilon') \subset \varepsilon$

Das letzte "$\subset$" gilt, weil auch κ^{-1} eine Kollineation ist.

Damit ist $\kappa(\varepsilon) = \varepsilon'$. Q.E.D.

(Q.E.D. = quod erat demonstrandum = was zu beweisen war = w.z.b.w.)

Satz: Jede Kollineation κ lässt harmonische Lage von Punkten unverändert.

Bew.: Konstruktion des vierten harmonischen Punktes in 2.2.6

2.2.9 Projektivitäten und Affinitäten

ohne Begründung: Im zwei- und im dreidimensionalen projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum P^2 und P^3 sind **die** Kollineationen zugleich **die** Projektivitäten.

(In anderen Räumen ist das anders. Im $\mathbb{C}^3$ ist z.B. der Übergang zu Punkten mit konjugiert komplexen Koordinaten eine Kollineation, aber keine Projektivität.)

Allgemeiner gilt: Kollineationen lassen nicht notwendig alle DVe unverändert, aber alle Projektivitäten lassen alle DVe unverändert.

Jetzt wieder im P^3 oder im P^2:

Projektivitäten, bei denen alle Bilder von Fernpunkten wieder Fernpunkte sind, heißen Affinitäten.

Affinitäten lassen alle Teilverhältnisse unverändert.

Bew.: TV(ABC) = DV$(ABCD)$, wobei D der Fernpunkt der Geraden durch A, B und C ist.
(Siehe 2.2.9)
Für die Bildpunkte A', B', C', D' unter einer Affinität α gilt:

DV$(A'B'C'D')$ = DV$(ABCD)$, weil α eine Projektivität ist,
und DV$(A'B'C'D')$ = TV$(A'B'C')$, weil $\alpha(D) = D'$ ein Fernpunkt ist.

Folglich ist TV$(A'B'C')$ = TV(ABC).