2.2 Geometrie im projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum P^3

2.2.1 Zentralprojektion

Geg.: Bildebene π,
Projektionszentrum $Z \in P^3 \setminus \pi$,
Abbildungsvorschrift $P^3 \setminus \{Z\} \to \pi$,
$X \mapsto ZX \cap \pi =: \{X'\}$.

Tafelskizze

Urbild	Bild
Z	kein Bild
Punkt $\neq Z$	Punkt
Gerade nicht durch Z	Gerade
Gerade durch Z	Punkt
Ebene nicht durch Z	π
Ebene durch Z	Gerade
Fernpunkt $\notin \pi$	eigentlicher Punkt
Fernpunkt $\in \pi$	gleich dem Urbild

Ist Z ein Fernpunkt, so wird die Zentralprojektion zu einer **Parallelprojektion**.
(Das ist ein Spezialfall, kein Entartungsfall!)

2.2.2 Kollineationen

kollinear . . . auf einer Geraden liegend

Eine **Kollineation** κ des P^3 ist eine bijektive Abbildung $\kappa : P^3 \to P^3$, die Geraden auf Geraden abbildet.

Eine **Kollineation** κ des P^2 ist eine bijektive Abbildung $\kappa : P^2 \to P^2$, die Geraden auf Geraden abbildet.

Beh.: κ Kollineation $\Rightarrow \kappa^{-1}$ Kollineation

Bew.: g' Gerade $\Rightarrow$
$g' = A'B'$ mit $A' \in g'$ und $B' \in g' \Rightarrow$
$\kappa^{-1}(g') \subset P^3$ enthält mindestens die Punkte $A := \kappa^{-1}(A')$, $B := \kappa^{-1}(B')$.
Die Verbindungsgerade $AB =: g$ hat als Bild eine Gerade $\kappa(g)$.
Die Gerade $\kappa(g)$ enthält $\kappa(A) = A'$ und $\kappa(B) = B'$, ist also gleich g'.

Der Beweis gilt für Kollineationen des P^3 und des P^2 in gleicher Weise.

2.2.3 Kollineationen κ des P^3 mit Fixpunktebene γ und Fixpunkt $Z \notin \gamma$

(Homologien)

Geg.: Paar (X, X'), $X \notin \gamma \cup \{Z\}$,
$X' = \kappa(X) \in ZX \setminus (\gamma \cup \{Z\}\ )$

Ges.: $Y' := \kappa(Y)$ für $Y \notin \gamma \cup ZX$

Tafelskizze

$XY \cap \gamma =: \{S\}$ ist Fixpunkt $\Rightarrow$
$\kappa(XY) = \kappa(XS) = X'S \Rightarrow$
$Y' \in X'S$

$ZY \cap \gamma$ ist Fixpunkt $\Rightarrow$
ZY ist Fixgerade $\Rightarrow$
$Y' \in ZY \ \Rightarrow$

$Y' \in X'S \cap ZY$

Ist dadurch eine Kollineation gegeben?

Auf $ZX \setminus \{Z\} \cup \gamma$ muss die Abbildung noch definiert werden,
z.B. mit der Geraden ZY.

κ ist tatsächlich eine Kollineation.

Der Beweis ist nicht einfach und erfordert Fallunterscheidungen.

Beim Beweis findet Verwendung: das projektive Axiom von Desargues.