2 Ein wenig projektive Geometrie

2.1 Fernpunkte

2.1.1 Projektive Einführung von Fernpunkten

Wir gehen aus vom euklidischen Anschauungsraum bzw. von der euklidischen Zeichenebene.

Parallele Geraden schneiden einander nicht.

Vereinbarung: Wir nehmen zu jeder Geraden **einen Fernpunkt** dazu
(ein zusätzliches Element, das nicht zum euklidischen Raum gehört!)
so dass gilt:

Zwei verschiedene Geraden g, h haben denselben Fernpunkt
$:\Longleftrightarrow g \parallel h$ (pA)

Damit (und mit den folgenden Vereinbarungen) wird der euklidische Raum abgeschlossen zum **projektiv erweiterten** oder **projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum**.

Die euklidische Ebene wird abgeschlossen zur **projektiv erweiterten** oder **projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene**.

Wir vereinbaren: Die Fernpunkte des Raumes bilden die **Fernebene**.

Die Punkte, die nicht Fernpunkte sind, heißen **eigentliche Punkte**.

Jede Ebene, die nicht Fernebene ist, heißt **eigentliche Ebene**.

Die Fernpunkte jeder eigentlichen Ebene bilden die **Ferngerade** dieser Ebene.

(Damit gilt: Jede eigentliche Ebene schneidet die Fernebene in einer Geraden.)

Jede Gerade, die nicht Ferngerade ist, heißt **eigentliche Gerade**.

Es gilt: Parallele eigentliche Ebenen haben dieselbe Ferngerade.
Warum?

(Damit gilt: Parallele eigentliche Ebenen schneiden einander in einer Geraden.)

(Es gilt auch: Nichtparallele eigentliche Ebenen schneiden einander in einer Geraden.)

Insgesamt gilt:

Satz: Je zwei (verschiedene) Ebenen im projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum schneiden einander in einer Geraden.

Es gilt auch

Satz: Im projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum schneidet jede Gerade g jede Ebene ε, die g nicht enthält, in genau einem Punkt S.
S ist Fernpunkt $\iff g \parallel \varepsilon$.

Beweis: Selbständige Überlegung
(aufschreiben!)

In der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene gilt:

Je zwei nichtparallele eigentliche Geraden schneiden einander in einem eigentlichen Punkt.

Je zwei parallele eigentliche Geraden schneiden einander in einem Fernpunkt.

Jede eigentliche Gerade schneidet **die Ferngerade** in einem Fernpunkt.

Insgesamt gilt:

Satz: Je zwei Geraden in der projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene schneiden einander in einem Punkt.

2.1.2 Einfache Aussagen über den projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum

Satz: Zwei verschiedene Geraden g, h haben einen Schnittpunkt $S \Longleftrightarrow g$ und h liegen in einer Ebene ε.

Beweis: $'' \Rightarrow''$: $g \cap h = \{S\}$
1. Fall: S Fernpunkt $\Rightarrow g \parallel h \Rightarrow$ Beh.
2. Fall: S eigentlicher Punkt $\Rightarrow$ Beh.
$'' \Leftarrow''$: g, h liegen in einer Ebene
1. Fall: $g \cap h = \{S\}$, S eigentlicher Punkt $\Rightarrow$ Beh.
2. Fall: $g \parallel h \Rightarrow g$, h schneiden einander in einem Fernpunkt $\Rightarrow$ Beh.
Fertig!

Oder haben wir etwas vergessen?

Ja!
g oder h oder beide können Ferngerade sein.
Das ist noch zu untersuchen:

1. Fall: g Ferngerade und h eigentliche Gerade:
Dann ist g Ferngerade einer eigentlichen Ebene ε'.
Dann ist $h \parallel \varepsilon'$ oder h nichtparallel ε'.
$'' \Rightarrow''$: $g \cap h = \{S\}$
Da $S \in g$ ist S Fernpunkt.
Da $S \in \varepsilon' \Rightarrow$ Es gibt eine eigentliche Gerade $h' \subset \varepsilon'$ mit Fernpunkt S.
Da $S \in h \cap h' \Rightarrow h \parallel h'$.
Die Parallelebene ε zu ε' durch h enthält h und hat dieselbe Ferngerade g wie ε'.
$\Rightarrow g, h \subset \varepsilon \Rightarrow$ Beh.
$'' \Leftarrow''$: g, h liegen in einer Ebene ε
$\Rightarrow g$ ist die Ferngerade von ε
$\Rightarrow$ der Fernpunkt S von h liegt auf $g \Rightarrow$ Beh.

2. Fall: g, h sind beide Ferngeraden.
Dann ist g Ferngerade einer eigentlichen Ebene α
und h Ferngerade einer eigentlichen Ebene β.
$'' \Rightarrow''$: $g \cap h = \{S\}$. Man braucht nichts zu beweisen, weil g und h beide in der einen Fernebene liegen.

"$\Leftarrow$": g, h liegen in einer Ebene (schon erfüllt, da beide in der Fernebene liegen).

Fall 2.1: $\alpha \parallel \beta$

Dann ist $g = h$. Das kann nach Vor. nicht sein.

Fall 2.2: α nicht parallel zu β.

Dann ist $\alpha \cap \beta$ eine eigentliche Gerade k. Der Fernpunkt S von k liegt in α, also auf g und in β, also auf h. $\Rightarrow$ Beh.

So ähnlich beweist man weitere Aussagen über den projektiv abgeschlossenen euklidischen Raum, z.B.:

Satz: Drei Ebenen haben immer mindestens einen Punkt gemeinsam.

Satz: Zu zwei **windschiefen Geraden** g, h (Geraden, die nicht in einer Ebene liegen) gibt es durch jeden gegebenen Punkt $P \notin g \cup h$ genau eine **Treffgerade** k
($P \in k$, $k \cap g \neq \emptyset$, $k \cap h \neq \emptyset$).

Satz: Zu einer Geraden g und einem Punkt $P \notin g$ gibt es genau eine Ebene ε mit $P \in \varepsilon$ und $g \subset \varepsilon$.

Ist beim Beweis eine bestimmte Reihenfolge sinnvoll?

2.1.3 Zentralprojektion einer Ebene auf eine dazu nicht parallele Ebene

Tafelskizze

Urbildebene ε (''Landschaft'')
Bildebene π (''Leinwand'')
Projektionszentrum Z (''Auge'')
Urbildpunkt $P \mapsto P'$ Bildpunkt
Urbildgerade $g \mapsto g'$ Bildgerade

Bilder von Punkten in ε sind Punkte in π, speziell
Bilder von **Verschwindungspunkten** in ε sind Fernpunkte in π

Bilder von Geraden in ε sind Geraden in π, speziell
Bild der Geraden der Verschwindungspunkte in ε ist die Ferngerade von π

Geraden in ε, die einander in einem Verschwindungspunkt schneiden, haben parallele Bilder in π

Bilder paralleler Geraden in ε schneiden einander in einem **Fluchtpunkt** in π, dem Bild eines Fernpunktes

Die Gerade der Fluchtpunkte in π, das Bild der Ferngeraden, ist der **Horizont**

2.1.4 Anwendung: Vervollständigung der Perspektive eines Würfels mit karierten Seitenflächen

Tafelskizze

Frage: Kann man (pA) (siehe 2.1.1) erreichen oder nur wünschen?

2.1.5 Konstruktion der Fernpunkte

(Angabe eines Modells für die Fernpunkte)

Ist g' eine Gerade im **euklidischen** Raum, so bezeichne $F_{g'}$ die Menge aller zu g' parallelen Geraden, das **Parallelenbündel** von g'.

Wir bezeichnen $F_{g'}$ als **Fernpunkt** von g'
und setzen $g := g' \cup \{F_{g'}\}$.
Damit ist $F_{g'} \in g$.
(Ebenso: $h := h' \cup \{F_{h'}\}$.)
Damit gilt: $F_{g'} \in h \Leftrightarrow$
$F_{g'} = F_{h'} \Leftrightarrow$
$h' \in F_{g'} \Leftrightarrow$
$g' \parallel h'$.
Damit ist (pA) erfüllt.

(pA) führt nicht auf Widersprüche!