1.4 Was ist eine Gerade?

Antwort nach Plato (427 - 347 v.Chr.)

Höhlengleichnis

Punkte, Geraden usw. existieren in der Welt der Ideen.

Die Welt der Ideen ist die eigentlich wirkliche Welt.

Was wir sehen, ist nur ein schwacher Schatten dieser Ideen.

(Punkt - Klecks,

Gerade - unregelmäßiger Streifen mit ausgezackten Rändern)

Gegen-Standpunkt: Begriffe entstehen durch Abstraktion aus Erfahrungen.

1.5 Das Parallelenaxiom und die nicht-euklidische (hyperbolische) Geometrie

1.5.1 Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms

Postulat 5 (Axiom 11) klingt kompliziert für ein Axiom.

Viele Versuche, das Parallelenaxiom als Satz zu beweisen,

meist durch einen indirekten Beweis

(durch einen Beweis mit Widerspruch).

Alle vergeblich.

Heute formuliert man das Parallelenaxiom einfacher:

Zu einer gegebenen Geraden g gibt es durch einen gegebenen Punkt außerhalb von g genau eine Parallele h (eine Gerade h, die mit g in einer Ebene liegt, so dass $g \cap h = \emptyset$).

Letzte veröffentlichte ernstgemeinte Versuche Ende des 18. Jahrhunderts.

Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855),

Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 - 1856),

János Bolyai (1802 - 1860)

ersetzten das Parallelenaxiom durch ein anderes:

Zu einer gegebenen Geraden gibt es durch einen Punkt außerhalb mindestens zwei verschiedene Parallelen.

Sie sind überzeugt:
Das führt nicht auf Widersprüche.

Man erhält dadurch eine neue Geometrie, die keine Widersprüche enthält und von der euklidischen Geometrie verschieden ist, eine nichteuklidische Geometrie.

Welche Geometrie im realen Raum gilt, entscheidet die Physik, nicht die Mathematik.

Gauß war auch Leiter der Landesvermessung des Königreichs Hannover.

Er ließ die Winkel des Dreiecks Brocken - Inselsberg - Hoher Hagen besonders genau messen.

Die Abweichung der Winkelsumme von 180° lag innerhalb der Meßgenauigkeit.

Die euklidische Geometrie, die erwähnte nichteuklidische (hyperbolische) Geometrie und weitere nichteuklidische Geometrien sind weit entwickelt.

1.5.2 Axiomatisches Vorgehen

Man wählt wenige einfache Sätze aus einer mathematischen Theorie aus,
stellt sie als Axiome an den Anfang
und leitet daraus auf rein logischem Weg die Aussagen der Theorie her.

Axiomensysteme müssen sein: **widerspruchsfrei**.

Sie sollen sein: **unabhängig**.
(Kein Axiom soll aus den anderen folgen.)

Ein Axiomensystem heißt **vollständig**, wenn jede Aussage der Theorie daraus beweisbar oder widerlegbar ist.
(Vorsicht: ein schwieriger Begriff!)

Nicht vollständig ist z.B. das Axiomensystem bestehend aus den Gruppenaxiomen.

1.5.3 Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems

Man kann sie z.B. zeigen durch Angabe eines Modells.

Ein Modell für die euklidische Geometrie: $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$.

Die euklidische Geometrie ist widerspruchsfrei,
wenn die Theorie der reellen Zahlen widersprucfrei ist.
(relativer Widerspruchsfreiheitsbeweis)

Seit ca. 1870 weiß man: Es gibt Modelle der hyperbolischen Geometrie im Rahmen der euklidischen Geometrie.

Die hyperbolische Geometrie ist widerspruchsfrei, wenn die euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist.

Modell von Felix Klein (1849 - 1925, Prof. an der TU München von 1875 bis 1880): Skizze

Modelle von Henri Poincaré (1854 - 1912): Skizze

1.5.4 Unabhängigkeit eines Axioms A von Axiomen B_1, B_2, . . . , B_k

Dass ein Axiom A unabhängig ist von Axiomen B_1, B_2, . . . , B_k, kann man zeigen, indem man
ein Modell angibt, in dem B_1, B_2, . . . , B_k gelten, nicht aber A.

(Bekanntes Beispiel: Kommutativität ist unabhängig von den anderen Gruppenaxiomen: Es gibt nichtkommutative Gruppen.)

1.6 Moderne Grundlegung der Geometrie

1.6.1 axiomatisches Vorgehen nach Hilbert (David Hilbert (1862 - 1943))

"Grundlagen der Geometrie", erstmals 1899, mehrere Auflagen, z.B. auch Stuttgart 1972

Hilbert definiert Punkte, Geraden und Ebenen nicht.

Die Axiome beschreiben die Beziehungen zwischen ihnen vollständig.

Man kann dabei auch an andere Objekte denken.
Wenn diese die Axiome erfüllen, gelten für sie alle Aussagen der Theorie.

1.6.2 Axiome nach Karzel/Sörensen/Windelberg

"Einführung in die Geometrie" 1973

Stufenweiser Aufbau der euklidischen Geometrie mit Abschweifungen

Beispiele für Inzidenzräume:

$P = \emptyset, \mathfrak{G} = \emptyset$

$P = \{x, y\}, \mathfrak{G} = \{G\}, G = \{x, y\}$

Wichtigste Beispiele: Zeichenebene oder $\mathbb{R}^2$,
Anschauungsraum oder $\mathbb{R}^3$