Geometrie für Lehramt an beruflichen Schulen

MA9925

Vorlesung von

Prof. Dr. Johann Hartl
Fakultät für Mathematik
Technische Universität München

Wintersemester 2014/15

Diese Folien bilden kein Skriptum zur Vorlesung.
Sie sollen das Mitschreiben entlasten.
Sie enthalten nicht die Tafelskizzen und nicht die mündlichen Ergänzungen in der Vorlesung.

1 Von der naiven Elementargeometrie zu den Grundlagen der Geometrie

1.1 Wie entstand die Geometrie?

1.1.1 Wortbedeutung

$\gamma\varepsilon\omega\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho\eta\sigma$ = Erdmaß, Landmessung

1.1.2 Notwendigkeit der Geometrie

Die Geometrie entstand aus praktischen Bedürfnissen.

Assuanstaudamm im südlichen Ägypten: Erbaut 1960 - 1971

Vorher seit Jahrtausenden: Jährliche Überschwemmungen des Niltals

Folgen:

Der Nilschlamm macht die Felder fruchtbar.

Die Felder müssen jährlich neu abgesteckt werden.

Nötig dafür: Jährliche Landvermessung.

Nötig dafür: Kenntnisse aus der Elementargeometrie,
Erfahrungswissen

Wie steckt man auf dem Feld einen rechten Winkel ab?

Geschlossene Schnur mit 30 gleichabständigen Knoten, also 30 gleichlangen Abschnitten auf der Schnur.

Drei Männer nehmen je einen Knoten in die Hand: Abstand 5 Abschnitte, 12 Abschnitte, 13 Abschnitte.

Beim Spannen der Schnur ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck.

(Lehrsatz des Pythagoras:

$5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$)

Die ägyptischen Landvermesser hießen daher auch Harpedonapten = Seilspanner.

1.1.3 Anfänge der Geometrie als Wissenschaft

Thales von Milet (ca. 624 - ca 546 v. Chr.),

Kaufmann, Philosoph und Mathematiker,

begründete Aussagen, indem er sie auf einfachere Aussagen zurückführte.

Philosoph: Alles kommt aus dem Urstoff Wasser.

Einfache Messung der Höhe einer Pyramide:

Warten, bis der Schatten eines senkrecht stehenden Stabes so lang ist, wie der Stab.

Dann Schatten der Spitze der Pyramide markieren.

Länge des Schattens der Pyramide messen.

Sie ist gleich der Höhe der Pyramide.

(Tafelskizze: ähnliche Dreiecke!)

1.2 Beispiele aus der naiven Elementargeometrie

1.2.1 Entfernung eines Schiffes

Tafelskizze: Turm, Meer, Schiff, Winkel α zwischen Turm und Sehstrahl

Turmhöhe bekannt, Winkel α messen, liefert die Entfernung des Schiffes

(z.B. durch Zeichnung in einem Maßstab oder

aus Tabelle)

1.2.2 Satz des Thales

Tafelskizze: Halbkreis k mit Kreismittelpunkt M und Kreisradius r über Kreisdurchmesser $\overline{AB}$, Dreiecksecke $C \neq A, B$ auf k, $\angle CAB = \alpha, \angle CBA = \beta, \angle ACM = \gamma_1, \angle BCM = \gamma_2$

Von jedem Punkt eines Kreises aus wird jeder Durchmesser des Kreises unter einem rechten Winkel gesehen (außer von den Endpunkten des Durchmessers).

Alternative Formulierung:

Sei M der Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ mit $A \neq B$. Sei $C \neq A, B$ ein Punkt auf dem Kreis um M durch A (und B). Dann ist der Winkel $\angle ACB$ ein Rechter.

Bew.:
ΔAMC ist gleichschenklig $\Rightarrow \alpha = \gamma_1$
ΔBMC ist gleichschenklig $\Rightarrow \beta = \gamma_2$
Folglich ist $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta$ die Hälfte der Winkelsumme im ΔABC, also ein Rechter.

Durch den Beweis ist der Satz des Thales zurückgeführt auf die beiden einfacheren Sätze:

In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte.

Sind diese beiden Sätze wirklich "einfacher"?

1.2.3 Satz vom gleichschenkligen Dreieck

Jedes Dreieck ist gleichschenklig.

Bew.:

Tafelskizze: "Allgemeines Dreieck" ABC,
M Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$,
m Mittellot von $\overline{AB}$,
w (nach Augenmaß) Winkelhalbierende des Winkels $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ mit $\gamma_1 = \gamma_2$ bei C,
Schnittpunkt S von m und w,
Lotfußpunkt D auf $\overline{AC}$ aus S,
Lotfußpunkt E auf $\overline{BC}$ aus S

(1) Wären m und w parallel, dann wäre w die Höhe aus C auf $\overline{AB}$, also $\alpha = \beta$ und ΔABC gleichschenklig. Fertig.

Ab jetzt ist $m \cap w =: S$ eindeutig bestimmt.

(2) $d(A, M) = d(B, M)$, $d(M, S) = d(M, S)$, $\angle AMS = \angle BMS \Rightarrow$
$d(A, S) = d(B, S)$ $\quad (*)$.

(3) $\gamma_1 = \gamma_2$, $d(C, S) = d(C, S), \angle CDS = \angle CES \Rightarrow$
ΔCDS kongruent $\Delta CES \Rightarrow$
$d(C, D) = d(C, E)$ $\quad (**)$
$d(D, S) = d(E, S)$ $\quad (***)$

(4) (*), (***) und $\angle ADS = \angle BES \Rightarrow$
ΔADS kongruent ΔBES
(Der rechte Winkel bei D bzw. bei E ist der größte Winkel im Dreieck, also der Gegenwinkel der größeren Seite.)
$\Rightarrow d(D, A) = d(E, B)$ $\quad (+)$

(5) (**), (+) $\Rightarrow d(C,A) = d(C,B) \Rightarrow$ ΔABC gleichschenklig

Folgerung 1: Weil der Beweis auch mit dem Mittellot von $\overline{AC}$ und der Winkelhalbierenden von $\angle ABC$ geführt werden kann, gilt sogar: Jedes Dreieck ist gleichseitig.

Folgerung 2: Weil der Satz falsch ist, muss im Beweis ein Fehler sein.

Bemerkung: Man muss aufpassen wie ein Haftelmacher, damit man nicht "etwas Falsches beweist".

1.3 Axiomatisches Vorgehen nach Euklid

1.3.1 Die "Elemente"

Um 300 v. Chr.: Euklid lebt in Alexandria und lehrt am Museion,
der größten Bibliothek des Altertums.

Man weiß fast nichts über sein Leben.

Euklid fasst das geometrische (und allgemeiner mathematische) Wissen seiner Zeit zusammen in 13 Büchern, genannt "Elemente".

Die Elemente bleiben 2000 Jahre lang **das** für die Wissenschaften vorbildliche Werk!

Man versuchte, auch andere Wissenschaften "more geometrico" zu begründen, aber ohne großen Erfolg.

1.3.2 Absicht Euklids

Aussagen, die so einleuchtend sind, dass sie keines Beweises bedürfen (Axiome und Postulate) und Definitionen werden aufgeschrieben.

Es werden Folgerungen gezogen
auf rein logischem Weg
ohne Rückgriff auf die Anschauung.

1.3.3 Kritik aus heutiger Sicht

Es gibt Lücken in der Darstellung.

Euklid hat z.B. die Anordnung nicht axiomatisiert:

Reihenfolge von Punkten auf einer Geraden,

Zerlegung einer Ebene durch eine Gerade in Halbebenen u.ä.

1.3.4 Das Axiom von Pasch

Vollständig wurde das Axiomensystem der euklidischen Geometrie durch das Axiom von Pasch 1882
(Moritz Pasch (1843 - 1930)):

A, B, C drei Punkte, nicht auf einer Geraden, a eine Gerade in der Ebene ABC mit $A, B, C \notin a$. Geht dann a durch einen Punkt der Strecke $\overline{AB}$, so auch durch einen Punkt der Strecke $\overline{BC}$ oder durch einen Punkt der Strecke $\overline{AC}$.

Skizze dazu!