7.7 Geodätische Krümmung von Kurven auf Flächen

Krümmung von Kurven gibt es für
- Raumkurven und für
- ebene Kurven.

Wie steht es mit Kurven auf krummen Flächen?

Im Raum: $\kappa = |\vec{x}''|$.
In der Ebene: $\kappa = \pm|\vec{x}''|$.

Für Kurven in einer Ebene ε gilt: $\vec{x}''$ liegt in ε
(bei geeignetem Anfangspunkt).

Für Kurven in einer Fläche Φ gilt im allgemeinen:
$\vec{x}''$ liegt nicht in Φ und $\vec{x}''$ liegt nicht in der Tangentenebene von Φ in $\vec{x}$.

Will man eine Krümmung einer Flächenkurve c von Φ als "Kurve auf der Fläche Φ, so braucht man einen Ersatz für $\vec{x}''$, der in der Tangentenebene von Φ in $\vec{x}$ liegt.

7.7.1 Definition: Sei
$\Phi : \vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine reguläre C^2-Fläche,
$c : \vec{x}(u(s),v(s)) =: \vec{x}(s)$, $s \in I$, eine reguläre C^2-Flächenkurve von Φ.
Dann heißt die
Normalprojektion von $\vec{x}''(s)$ in die Tangentialebene von Φ in $\vec{x}(s)$
die **kovariante Richtungsableitung** von $\vec{x}\,'(s)$ an der Stelle s.
Bezeichnung dafür:

$$\frac{D\vec{x}\,'(s)}{ds}.$$

7.7.2 Definition: Das **Vektorfeld** $\vec{x}\,'(s)$, $s \in I$, **längs** c heißt **absolut parallel**, wenn gilt:

$$\frac{D\vec{x}\,'(s)}{ds} = \vec{o}.$$

7.7.3 Definition:

$$\kappa_g(s) := |\frac{D\vec{x}\,'(s)}{ds}|$$

heißt die **geodätische Krümmung** von c an der Stelle s.

$$\frac{\frac{D\vec{x}\,'(s)}{ds}}{|\frac{D\vec{x}\,'(s)}{ds}|}$$

heißt der **Seitenvektor** von c an der Stelle s.

7.7.4 Bemerkung: Offenbar gilt:

$$\frac{D\vec{x}\,'(s)}{ds} = \kappa_g(s) \cdot \frac{\frac{D\vec{x}\,'(s)}{ds}}{|\frac{D\vec{x}\,'(s)}{ds}|}$$

Vergleich: In der Ebene gilt:

$$\vec{x}'' = \kappa \cdot \vec{n}.$$

Unterschied: In der Ebene ist $\vec{n}$ durch $\vec{x}\,'$ bestimmt und κ vorzeichenbehaftet.
Dagegen ist stets $\kappa_g \geq 0$.

7.7.5 Satz: Sei
$\Phi : \vec{x}(u,v),\ (u,v) \in G$, eine reguläre C^2-Fläche,
$c : \vec{x}(u(s),v(s)),\ s \in I$, eine reguläre C^2-Flächenkurve von Φ.
Dann ist für jeden Parameterwert $s_0 \in I$ die geodätische Krümmung $\kappa_g(s_0)$ die Krümmung (in $\mathbb{R}^3$) im Punkt $\vec{x}(s_0)$ der Normalprojektion von c in die Tangentenebene von Φ im Punkt $\vec{x}(s_0)$.

Bew.: ohne

7.7.6 Bemerkung: Satz 7.7.5 macht nur eine Aussage über die geodätische Krümmung an der einen Stelle s_0.

7.7.7 Bemerkung:

$$\vec{x}''(s) - \frac{D\vec{x}\,'(s)}{ds}$$

ist senkrecht zur Tangentenebene von Φ im Punkt $\vec{x}(s)$.

7.7.8 Bemerkung: Sei $\vec{n}$ ein Normaleneinheitsvektor von Φ im Punkt $\vec{x}(s)$. Dann gilt:

$$\kappa_g(s) = |\frac{D\vec{x}\,'(s)}{ds}| = |\vec{x}''(s) \cdot \sin\angle(\vec{x}'', \vec{n})|$$

Nach dem Satz von Meusnier gilt:

$$\kappa_n(s) = \pm|\vec{x}''(s) \cdot \cos\angle(\vec{x}'', \vec{n})|$$

7.7.9 Satz: Sei
Φ : $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine reguläre C^2-Fläche,
c : $\vec{x}(u(s), v(s))$, $s \in I$, eine reguläre C^2-Flächenkurve von Φ.
Dann gilt:

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2.$$

Beweis:

$$\kappa_g^2 + \kappa_n^2 = |\vec{x}''|^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) =$$

$$|\vec{x}''|^2 = \kappa^2$$

mit $\varphi := \angle(\vec{x}'', \vec{n})$.

7.7.10 Satz: Seien Φ eine reguläre C^2-Fläche und c_1, c_2 zwei reguläre C^2-Flächenkurven von Φ, die einen Punkt P und im Punkt P die Schmiegebene gemeinsam haben. Dann gilt: c_1 und c_2 besitzen in P dieselbe geodätische Krümmung.

Beweis: Seien
$\Phi : \vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine reguläre C^2-Fläche,
$c_1 : \vec{x}(u(s), v(s))$, $s \in I$, eine reguläre C^2-Flächenkurve von Φ und
$c_2 : \vec{x}(u(t), v(t))$, $t \in J$, eine reguläre C^2-Flächenkurve von Φ, die in $x(u,v)$ dieselbe Tangente g und dieselbe Schmiegebene besitzen..
Dann gilt nach 7.7.9 für beide Kurven:

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2.$$

Nach dem Satz von Meusnier ist κ am Punkt P für beide Kurven gleich.
Die Normalkrümmung κ_n ist nur abhängig von der Flächenrichtung, also auch gleich.
Darum ist auch die geodätische Krümmung ≥ 0 für beide Kurven gleich.

7.7.11 Bemerkung: Die geodätische Krümmung von Flächenkurven kann man auch orientieren, indem man einen Normaleneinheitsvektor der Fläche auszeichnet.

7.7.12 Bemerkung: Die geodätische Krümmung ist nützlich in der Theorie der Flächenstreifen.