7.6 Flächenkrümmungen

Flächenkrümmung hat etwas zu tun mit der Änderung des Normaleneinheitsvektors.

7.6.1 Zweite Grundform der Flächentheorie

$\Phi:\ \vec{x}(u,v),\ (u,v)\in G$, regul. C^2-Fläche,

$$\vec{n} := \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|}$$

$$\vec{x}_{uu}\cdot\vec{n} =: h_{11},$$

$$\vec{x}_{uv}\cdot\vec{n} =: h_{12} = h_{21} := \vec{x}_{vu}\cdot\vec{n},$$

$$\vec{x}_{vv}\cdot\vec{n} =: h_{22}.$$

Damit heißt

$$II(a_1,a_2) = a_1^2 h_{11} + 2a_1a_2h_{12} + a_2^2 h_{22}$$

die **zweite Grundform der Flächentheorie**.

7.6.2 Berechnungen der h_{jk}

$$\vec{n}\vec{x}_u = 0 \Rightarrow \vec{n}_u\vec{x}_u + \vec{n}\vec{x}_{uu} = 0 \Rightarrow$$

$$h_{11} = -\vec{n}_u\vec{x}_u$$

$$\vec{n}\vec{x}_u = 0 \Rightarrow \vec{n}_v\vec{x}_u + \vec{n}\vec{x}_{uv} = 0 \Rightarrow$$

$$h_{12} = -\vec{n}_v\vec{x}_u$$

$$\vec{n}\vec{x}_v = 0 \Rightarrow \vec{n}_u\vec{x}_v + \vec{n}\vec{x}_{vu} = 0 \Rightarrow$$

$$h_{21} = -\vec{n}_u\vec{x}_v = -\vec{n}_v\vec{x}_u$$

$$\vec{n}\vec{x}_v = 0 \Rightarrow \vec{n}_v\vec{x}_v + \vec{n}\vec{x}_{vv} = 0 \Rightarrow$$

$$h_{22} = -\vec{n}_v\vec{x}_v$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\sqrt{g}} \Rightarrow$$

$$h_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \det(\vec{x}_{uu}\vec{x}_u\vec{x}_v)$$

$$h_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \det(\vec{x}_{uv}\vec{x}_u\vec{x}_v) = h_{21}$$

$$h_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \det(\vec{x}_{vv}\vec{x}_u\vec{x}_v)$$

7.6.3 Satz von MEUSNIER

$\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, reguläre C^2-Fläche, $c: \ \vec{x}(s) := \vec{x}(u(s),v(s)), \ s \in I$, reguläre W-Punkt-freie C^2- Flächenkurve von Φ, s Bogenlänge von c,

$$\vec{n} := \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\sqrt{g}},$$

τ Tangentenebene von Φ in $\vec{x}(s)$,
σ Schmiegebene von c in $\vec{x}(s)$.
Dann gilt: $\vec{x}''\vec{n} = \kappa\vec{n}_c\vec{n}$, wobei
κ ... Krümmung von c
$\vec{n}_c$ ... Hauptnormalenvektor von c,
also

$$\vec{x}''\vec{n} = \kappa \cos\angle(\vec{n}_c,\vec{n}) = \kappa \sin\angle(\sigma,\tau).$$

Tafelskizze

Andererseits ist
$\vec{x}' = \vec{x}_u u' + \vec{x}_v v'$,
$\vec{x}'' = \vec{x}_{uu}u'^2 + 2\vec{x}_{uv}u'v' + \vec{x}_{vv}v'^2 + \vec{x}_u u'' + \vec{x}_v v''$,
also

$$\vec{x}''\vec{n} = h_{11}u'^2 + 2h_{12}u'v' + h_{22}v'^2 =$$

$$= \frac{h_{11}\dot{u}^2 + 2h_{12}\dot{u}\dot{v} + h_{22}\dot{v}^2}{(\frac{ds}{dt})^2}$$

Satz: $\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, reguläre C^2-Fläche,
$c: \ \vec{x}(t) := \vec{x}(u(t), v(t)), \ t \in I$, reguläre W-Punkt-freie C^2- Flächenkurve von Φ,
$\kappa(t) \ldots$ Krümmung von c
τ Tangentenebene von Φ an der Stelle $(u(t), v(t))$,
σ Schmiegebene von c an der Stelle t.
Dann ist

$$\kappa \cdot \sin \angle(\sigma, \tau) = \frac{h_{11}\dot{u}^2 + 2h_{12}\dot{u}\dot{v} + h_{22}\dot{v}^2}{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2} =$$

$$= \frac{II(\dot{u}, \dot{v})}{I(\dot{u}, \dot{v})} =: \kappa_n$$

$\kappa_n \ldots$ **Normal(schnitt)krümmung** von Φ an der Stelle (u,v) in Richtung $(\dot{u}, \dot{v})$.

Korollar: Sei P ein einfacher Punkt einer regulären C^2-Fläche Φ. Dann gilt: Alle regulären C^2-Flächenkurven von Φ, für die P ein einfacher Punkt und kein W-Punkt ist, die in P dieselbe Tangente und dieselbe Schmiegebene besitzen, die nicht Tangentenebene von Φ in P ist, haben in P dieselbe Krümmung.

Satz: MEUSNIER

Vor. wie im Satz vorher. Dann gilt:

$$R = R_n \sin \angle(\sigma, \tau)$$

Dabei: $R \ldots$ Krümmungsradius von c

$R_n \ \ldots \frac{1}{\kappa_n}$ Normalschnittkrümmungsradius von Φ in Richtung $(\dot{u}, \dot{v})$.

Tafelskizze: Meusnier-Kugel, Fläche Φ, Kurventangente im Punkt P projizierend, τ, σ, Krümmungskreis von c, R, R_n

Bem.: Für alle Schnitte einer regulären C^2-Fläche mit Ebenen durch eine feste Tangente in einem festen Flächenpunkt gilt: Die Krümmungsachse jedes schiefen Schnittes geht durch den Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes.