7.6.4 Hauptkrümmungen, Satz von Euler

$\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, reguläre C^2-Fläche, $(u,v) \in G$ fest, $(a_1,a_2) \in \mathbb{R}^2$ legen eine Flächenrichtung durch $\vec{t}$ an der Stelle (u,v) fest:

$$\vec{t} = a_1\vec{x}_u + a_2\vec{x}_v.$$

Nach 7.6.3 ist

$$\kappa_n(a_1,a_2) = \frac{II(a_1,a_2)}{I(a_1,a_2)} =$$

$$\frac{h_{11}a_1^2 + 2h_{12}a_1a_2 + h_{22}a_2^2}{g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + g_{22}a_2^2}$$

die Normal(schnitt)krümmung von Φ an der Stelle (u,v) in Richtung (a_1,a_2) oder in Richtung $\vec{t}$.

Offenbar hängt $\kappa_n(a_1,a_2)$ nur ab vom Verhältnis $a_1 : a_2$, also nur von der Richtung von $\vec{t}$, nicht von der Länge von $\vec{t}$.

Untersuchung des Ausdrucks $\kappa_n(a_1,a_2)$ zeigt:

Entweder es gilt: $\kappa_n(a_1, a_2)$ hängt nicht ab von (a_1, a_2)

oder es gilt: $\kappa_n(a_1, a_2)$ besitzt genau ein Maximum und genau ein Minimum.

(ohne Beweis)

Definition: Sei $\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, eine reguläre C^2-Fläche.
Ist in an einer Stelle $(u,v) \in G$ die Normalkrümmung $\kappa_n(a_1, a_2) = 0$ für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, so heißt $\vec{x}(u,v)$ ein **Flachpunkt** von Φ.
Ist in an einer Stelle $(u,v) \in G$ die Normalkrümmung $\kappa_n(a_1, a_2) \neq 0$ dieselbe für alle $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, so heißt $\vec{x}(u,v)$ ein **Nabelpunkt** von Φ.

Definition: Sei $\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, eine reguläre C^2-Fläche.
Besitzt an einer Stelle $(u,v) \in G$ die Normalkrümmung $\kappa_n(a_1, a_2)$ als Funktion von (a_1, a_2) genau ein Minimum und genau ein Maximum, so heißen dieses Minimum und dieses Maximum die **Hauptkrümmungen** von Φ an der Stelle (u,v).

Die Flächenrichtungen (a_1, a_2), in denen die Hauptkrümmungen angenommen werden, heißen die **Hauptkrümmungsrichtungen** von Φ an der Stelle (u, v).

Satz: Sei $\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, eine reguläre C^2-Fläche. Sei $\vec{x}(u,v)$ weder Nabel- noch Flachpunkt von Φ. Dann gilt:
Die beiden Hauptkrümmungsrichtungen von Φ an der Stelle (u, v) sind zueinander senkrecht:

(ohne Beweis)

Satz von Euler: Sei $\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, eine reguläre C^2-Fläche, $\vec{t}$ eine Flächentangtente von Φ an einer Stelle $(u,v) \in G$, α_i der Winkel von $\vec{t}$ zur Hauptkrümmungsrichtung, die zur Hauptkrümmung κ_i gehört $(i = 1, 2)$. Dann gilt:

$$\kappa_n(\vec{t}) = \kappa_1 \cos^2 \alpha_1 + \kappa_2 \cos^2 \alpha_2.$$