

6.3 Ebene Kurven

6.3.1 Raumkurven in einer Ebene

Eine W-Punkt-freie (reguläre) C^3 -Kurve $c : \vec{x}(t)$,
($t \in I$) in \mathbb{E}^3 ist in einer Ebene enthalten \Leftrightarrow
 $\tau = 0 \quad \forall t \in I$.

Beweis: (\Rightarrow) Ist c in einer Ebene enthalten, so
sind $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$ und $\overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{x}}$ parallel zu dieser Ebene, also
linear abhängig.

Daher ist $\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{x}}) = 0$
und damit

$$\tau = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \overset{\cdot\cdot\cdot}{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2} = 0.$$

(\Leftarrow) c besitzt ein begleitendes Dreibein $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$
mit $\vec{b}' = -\tau\vec{n} = \vec{o}$,
also mit konstantem \vec{b} .

Die Schmiegebene $\sigma(s)$ hat die Ebenengleichung

$$\vec{b}(s) \cdot \vec{y} - \vec{b}(s) \cdot \vec{x}(s) = 0.$$

Dabei ist \vec{y} der laufende Punkt der Ebene,
 $\vec{b}(s)$ ein Normaleneinheitsvektor und
 $\vec{b}(s) \cdot \vec{x}(s)$ ein vorzeichenbehafteter Abstand von
 $\sigma(s)$ vom Ursprung.

Da $\vec{b}(s)$ konstant ist, sind alle Schmiegebenen von c zueinander parallel.

Zudem gilt:

$$\frac{d}{ds} \vec{b}(s) \cdot \vec{x}(s) = \vec{o} \cdot \vec{x}(s) + \vec{b} \cdot \vec{t} = 0.$$

Der vorzeichenbehaftete Abstand aller Schmiegebenen von c vom Koordinatenursprung ist also auch konstant.

Daher ist $\sigma(s) =: \sigma$ konstant und c eine Kurve, die in einer Ebene liegt, nämlich in der konstanten Schmiegeebene σ .

6.3.2 Ebene Kurven

Betrachtet man eine Kurve in einer Ebene ohne umgebenden Raum, so kann man

- die Ebene orientieren durch Auszeichnung einer Rechts-Basis und
- die Kurve beschreiben durch eine PD mit zwei Koordinatenfunktionen.

Wir werden für ebene Kurven eine **vorzeichenbehaftete Krümmung** definieren.

6.3.3 Parameterdarstellung ebener Kurven

Sei $c : \vec{x}(t) \quad (t \in I)$ eine reguläre C^1 -PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Ein Tangentenvektor von c an der Stelle t ist gegeben durch

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix},$$

der Tangenteneinheitsvektor von c an der Stelle t ist gegeben durch

$$\vec{t} := \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}},$$

der Hauptnormalenvektor von c an der Stelle t ist gegeben durch

$$\vec{n}(t) := \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}.$$

Die Vektoren (\vec{t}, \vec{n}) bilden eine Rechts-ONB, das **begleitende Zweibein** von c .

6.3.4 Die Frenetschen Ableitungsgleichungen für ebene Kurven

Sei $c : \vec{x}(s) \quad (s \in I)$ eine reguläre C^2 -PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}.$$

Der Tangenteneinheitsvektor von c an der Stelle s ist gegeben durch

$$\vec{t}(s) = \vec{x}'(s) = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix},$$

der Hauptnormalenvektor von c an der Stelle s ist gegeben durch

$$\vec{n}(s) := \begin{pmatrix} -y'(s) \\ x'(s) \end{pmatrix}.$$

Da $|\vec{x}'|^2 = 1$ auf I , ist $\vec{x}'\vec{x}'' = 0$ auf I , also

$$\vec{x}'' = \vec{t}' =: \kappa\vec{n}.$$

Dabei heißt $\kappa(s)$ die **Krümmung** von c an der Stelle s .

In Koordinaten:

$$x'' = -\kappa y', \quad y'' = \kappa x'.$$

Die Frenet-Gleichungen für ebene Kurven lauten damit

$$\vec{t}' = \kappa \vec{n}, \quad \vec{n}' = -\kappa \vec{t}.$$

6.3.5 Vorzeichen der Krümmung einer ebenen Kurve

Sei $c : \vec{x}(s)$ ($s \in I$) eine reguläre C^2 -PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\kappa = \kappa \det(\vec{t}, \vec{n}) = \det(\vec{x}', \vec{x}''),$$

also

$$\kappa(s) = \det(\vec{x}'(s), \vec{x}''(s)).$$

Die Krümmung $\kappa(s)$ einer regulären ebenen C^2 -Kurve ist $\left\{ \begin{array}{l} > 0 \\ < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$ Die Vektoren (\vec{x}', \vec{x}'') bilden eine $\left\{ \begin{array}{l} \text{Rechtsbasis} \\ \text{Linksbasis} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$ Die Kurve c ist an der Stelle s $\left\{ \begin{array}{l} \text{linksgekrümmt} \\ \text{rechtsgekrümmt} \end{array} \right\}$.

6.3.6 Die Krümmung einer ebenen Kurve bei allgemeinem Parameter

Sei $c : \vec{x}(t) \quad (t \in I)$ eine reguläre C^2 -PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3}.$$

Beweis:

$$\frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3} = \frac{\det(\vec{x}' \cdot \dot{s}, \vec{x}'' \dot{s}^2 + \vec{x}' \ddot{s})}{\dot{s}^3} = \det(\vec{x}', \vec{x}'').$$

6.3.7 Der Hauptsatz der Kurventheorie für ebene Kurven

Seien I ein Intervall und $\kappa : \left\{ \begin{array}{l} I \rightarrow \mathbb{R} \\ s \mapsto \kappa(s) \end{array} \right\}$ stetig. Dann gibt es bis auf gleichsinnige Bewegungen genau eine Kurve in der Ebene mit der Krümmung $\kappa(s)$ an jeder Stelle $s \in I$.

Beweis: Sei $\alpha(s)$ der Winkel, den $\vec{x}'(s)$ mit der positiven x -Achse einschließt. Dann ist

$$\vec{x}'(s) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(s) \\ \sin \alpha(s) \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} -\sin \alpha(s) \\ \cos \alpha(s) \end{pmatrix} \cdot \alpha'(s).$$

Folglich ist

$$\alpha'(s) = \kappa(s),$$

also

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^s \kappa(\sigma) d\sigma + \alpha_0$$

mit einer Integrationskonstanten α_0 . Damit ist

$$\vec{x}(s) = \int_{s_0}^s \begin{pmatrix} \cos(\int_{s_0}^{\sigma} \kappa(\tau) d\tau + \alpha_0) \\ \sin(\int_{s_0}^{\sigma} \kappa(\tau) d\tau + \alpha_0) \end{pmatrix} d\sigma + \vec{x}_0$$

mit einer Integrationskonstanten \vec{x}_0 .

Achtung: Die Bezeichnungen σ und τ haben nichts zu tun mit Schmiegeebene oder Torsion. Zu integrieren ist über s , aber s ist die obere Grenze des Integrals.

Daher die Bezeichnung der Integrationsvariablen mit dem entsprechenden griechischen Buchstaben σ .

Der nächste Buchstabe im griechischen Alphabet ist τ .

Aus einer vorgegebenen stetigen Krümmung lässt sich eine ebene Kurve bis auf ihre Lage in der Ebene eindeutig explizit berechnen (bis auf sogenannte Quadraturen = Integrationen).