## 6.2 Geometrische Eigenschaften von Kurven

Eine Eigenschaft (eine Größe) einer Kurve heißt **geometrisch**, wenn sie unabhängig ist von der PD und vom KS.

Um zu zeigen, dass eine Eigenschaft geometrisch ist, zeigt man die Invarianz gegenüber PTen (manchmal nur gegenüber gleichsinnigen) und gegenüber KTen (manchmal nur gegenüber gleichsinnigen).

### 6.2.1 Tangentenvektor, Tangenteneinheitsvektor, Tangente

*Skizze*

Sei $c: \ \vec{x}(t), \ t \in I$, eine $C^1$-Kurve und $t \in I$ eine reguläre Stelle von $c$. Dann ist $\dot{\vec{x}}(t)$ **ein Tangentenvektor** von $c$ an der Stelle $t$ und

$$\frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|}$$

**der Tangenteneinheitsvektor** von $c$ an der Stelle $t$.

Die Gerade $g : \vec{y} = \vec{x}(t) + v\dot{\vec{x}}(t), \; v \in \mathbb{R}$, heißt die **Tangente** von $c$ an der Stelle $t$.

### 6.2.2 Bogenlänge einer $C^1$-Kurve

Geometrische Überlegung:

*Skizze: Kurve mit Teilpunkten* $\vec{x}(t_0), \vec{x}(t_1), \vec{x}(t_2), \ldots, \vec{x}(t_{n-1}), \vec{x}(t_n)$

$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n$

Ein einer Kurve einbeschriebener Polygonzug hat die Länge

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})|}{t_i - t_{i-1}} \cdot (t_i - t_{i-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|\vec{x}(t_i) - \vec{x}(t_{i-1})|}{\Delta t_i} \cdot \Delta t_i$$

**6.2.3 Def.:** Eine $C^1$-Kurve $c : \; \vec{x}(t), \; t \in [a, b]$, hat die **Bogenlänge**

$$\int_a^b |\dot{\vec{x}}(t)| \, dt.$$

**6.2.4 Bem.:** Man kann zeigen:

$$\lim_{n\to\infty,\ t_i-t_{i-1}\to 0} \sum_{i=1}^{n} \frac{|\vec{x}(t_i)-\vec{x}(t_{i-1})|}{\Delta t_i} \cdot \Delta t_i =$$

$$\int_a^b |\dot{\vec{x}}(t)|\ dt,$$

aber das ist komplizierter als man denkt.
o.B.

### 6.2.5 Verhalten des Tangentenvektors bei KTen und PTen

Eine KT, die kart. (Punkt-)Koordinaten $\vec{x}$ in kart. Koordinaten $\vec{y}$ überführt, hat die Gestalt:

$$\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$$

mit einer orthogonalen Matrix $A$ (d.h. $A^T A = E =$ Einheitsmatrix) und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$ die Raumdimension).

Transformation von Vektorkoordinaten $\vec{v}$ in $\vec{w}$:

$$\vec{w} = A\vec{v}.$$

**Geg.:** $C^1$-Kurve $c: \ \vec{x}(t), \ t \in I$, und kart. KT $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$ sowie zul. $C^1$-PT $f : J \to I$.

Auswirkung der KT:

$$\dot{\vec{y}}(t) = A\dot{\vec{x}}(t)$$

Auswirkung der PT:

$$\vec{z}(u) := \vec{x}(f(u))$$

Dann ist

$$\dot{\vec{z}}(u) = (\text{Kettenregel}) = \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)$$

**6.2.6 Satz:** Der Begriff Tangenteneinheitsvektor ist ein geometrischer Begriff bezüglich gleichsinniger zulässiger PTen. Der Begriff Tangente ist ein geometrischer Begriff bezüglich zulässiger PTen.

**Bew.:** Bezüglich KTen gilt: $\dot{\vec{x}}(t)$ transformiert sich wie ein Vektor. Da $A$ orthogonal, ist $|\dot{\vec{y}}(t)| = 1$.

Bezüglich PTen gilt:

$$\frac{\dot{\vec{z}}(u)}{|\dot{\vec{z}}(u)|} = \frac{\dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)}{|\dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)|} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} \cdot \mathrm{sgn}(\dot{f}(u))$$

Die Tangente $g : \vec{w} = \vec{x}(t) + v\dot{\vec{x}}(t),\ v \in \mathbb{R}$, wird zu $A\vec{z}(u) + \vec{b} + vA\dot{\vec{z}}(u),\ v \in \mathbb{R}$. Da $A\vec{z}(u) + \vec{b} = \vec{x}(t)$ und da $\dot{\vec{x}}(t)$ und $\dot{\vec{z}}(u)$ l.a. sind, ist die Tangente also invariant.

**6.2.7 Satz:** Die Bogenlänge ist geometrisch bezüglich gleichsinniger zulässiger PTen.

**Bew.:** Geg.: $C^1$-Kurve $c :\ \vec{x}(t),\ t \in [a, b]$,
PT $f : [c, d] \to [a, b]$ mit $\dot{f} > 0$
und KT $\vec{y} = A\vec{x} + \vec{b}$.
$c : \vec{y}(u) = A\vec{x}(f(u)) + \vec{b}$.
$\dot{\vec{y}}(u) = A \cdot \dot{\vec{x}}(f(u)) \cdot \dot{f}(u)$
Da $A$ orthogonal:
$|\dot{\vec{y}}(u)| = |\dot{\vec{x}}(f(u))||\dot{f}(u)|$

$$\int_a^b |\dot{\vec{x}}(t)|\, dt = \int_{f(c)}^{f(d)} |\dot{\vec{x}}(t)|\, dt = \int_c^d |\dot{\vec{x}}(f(u))|\dot{f}(u)du =$$

$$\int_c^d |\dot{\vec{y}}(u)\ du$$

Verwendet: Substitutionsregel für Integrale und $\dot{f}(u) > 0$

## 6.2.8 Beispiele:

**(1)**

$$c: \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dabei: $a, b > 0$.
Es gilt:

$$(\frac{x_1(t)}{a})^2 + (\frac{x_2(t)}{b})^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Daher ist $c$ in einer Ellipse enthalten.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix} \neq \vec{o}$$

$c$ ist eine reguläre $C^\omega$-Kurve, lokal einfach aber nicht einfach (da $2\pi$-periodisch).

$$\dot{\vec{x}}(t)^2 = a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t$$

Die Bogenlänge führt auf ein elliptisches Integral, nicht elementar auswertbar.

**(2)**

$$c: \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \ t \in [0, 2\pi[$$

Dabei: $a, b > 0$.
$c$ ist einfach

*Skizze mit Punkten* $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$.

$c$ ist die ganze Ellipse.

**(3)**

$$c : \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cosh t \\ b \sinh t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Dabei: $a, b > 0$.

*Skizze der Graphen von* cosh *und von* sinh *im selben KS*

Es gilt:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Folglich ist

$$\left(\frac{x_1(t)}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2(t)}{b}\right)^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Daher ist $c$ in einer Hyperbel enthalten.

*Skizze*

$c$ ist ein Hyperbelast!

### 6.2.9 Bogenlänge als Funktion des Parameters

Sei $c : \vec{x}(t),\ t \in I$, eine **reguläre** $C^1$-Kurve und $a \in I$.

Sei
$$s(t) := \int_a^t |\dot{\vec{x}}(\tau)|\ d\tau.$$
Dann ist $\dot{s}(t) = |\dot{\vec{x}}(t)| > 0\ \forall t \in I$, also die Abb. $s : I \to J,\ s : t \mapsto s(t)$ streng monoton zunehmend und stetig (sogar $C^1$). Folglich ist sie umkehrbar auf $J$. Es gibt $f : J \to I,\ s \mapsto f(s) = t$. Damit ist $c : \vec{x}(f(s)),\ s \in I$, auf die Bogenlänge als Parameter bezogen. Die PD mit der Bogenlänge als Parameter ist eindeutig bis auf die Anfangsstelle und die Orientierung.

Weil $\dot{s}(t) \neq 0\ \forall t \in I$, ist $f \in C^1(J)$ und
$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{1}{|\dot{\vec{x}}(t)|}$$

Damit ist fast schon gezeigt:

**6.2.10 Satz:** Jede reguläre $C^r$-Kurve ($r \geq 1$) lässt sich auf ihre Bogenlänge als Parameter beziehen. Diese PT ist zulässig. Die PD mit der Bogenlänge ist eine $C^r$-PD.

**6.2.11 Bem.:** 6.2.10 ist ein Existenzsatz. Es ist in der Regel nicht möglich, die Parametrisierung mit der Bogenlänge explizit anzugeben, aus zwei Gründen:

Das Integral

$$s(t) := \int_a^t |\dot{\vec{x}}(\tau)| d\tau$$

lässt sich i. allg. nicht explizit auswerten.

Die Abb. $t \mapsto s(t)$ lässt sich i. allg. nicht explizit umkehren.

### 6.2.12 Auf ihre Bogenlänge bezogene Kurven

Die Bogenlänge als Kurvenparameter wird mit $s$ bezeichnet, wenn nichts anderes vereinbart ist.

Die Ableitung nach $s$ wird mit einem Strich ' bezeichnet.

Die Bogenlänge $s$ heißt auch **natürlicher Parameter**.

Es gilt:

$$\vec{x}\,'(s) = \frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{1}{\dot{s}(t)} = \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|}$$

Stets ist

$$|\vec{x}\,'| = 1, \qquad (1)$$

also

$$\vec{x}\,'^2 = 1. \qquad (2)$$

Ableiten von (2) liefert nach Division durch 2:

$$\vec{x}\,'\vec{x}\,'' = 0. \qquad (3)$$

**6.2.13 Bem.:** Da Formeln unter Verwendung der Bogenlänge besonders einfach werden, entwickeln wir die Theorie der Kurven unter Verwendung der Bogenlänge.

**6.2.14 Bsp.: Schraub(en)linie**

$c\,:\,\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ pt \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R},$ mit $r > 0$, $p \in \mathbb{R}$ ist PD einer Schraublinie. Diese kann in sich bewegt (verschraubt) werden.

$t$ ... **Schraubwinkel**
$p$ ... **Schraubparameter**
$r$ ... **Schraubradius**

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ p \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\vec{x}}^2 = r^2 + p^2 > 0 \ c \text{ ist}$$

eine reguläre $C^\omega$-Kurve.

Bogenlänge mit Anfangsstelle $t = 0$:

$$s(t) = \int_0^t \ |\dot{\vec{x}}(\tau)| \ d\tau = \int_0^t \ \sqrt{r^2 + p^2} \ d\tau =$$

$$= \sqrt{r^2 + p^2} \cdot t$$

$$t(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2 + p^2}}$$

PD von $c$ mit der Bogenlänge $s$:

$$c : \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}} \\ r \cdot \sin \frac{s}{\sqrt{r^2+p^2}} \\ \frac{p \cdot s}{\sqrt{r^2+p^2}} \end{pmatrix}$$

**Spezialfall:** $p = 0$ ... **Kreis** mit Radius $r$:

$$c : \ \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \frac{s}{r} \\ r \cdot \sin \frac{s}{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 6.2.15 Begleitendes Dreibein

**Geg.:** regul. $C^2$-Kurve $c: \ \vec{x}(s), \ s \in I$

Ein Punkt $\vec{x}(s)$ heißt **W-Punkt** von $c$ $:\Leftrightarrow$ $\vec{x}\,''(s) = \vec{o}$.

Um Eigenschaften von $c$ zu ermitteln, ordnen wir jedem $s \in I$ eine Orthonormalbasis (ONB) $\vec{t}(s)$, $\vec{n}(s)$, $\vec{b}(s)$ zu, die von der Kurve abhängt.

Wir setzen dazu voraus: $c$ sei **W-Punkt-frei**.

$\vec{t}(s) := \vec{x}\,'(s)$
$\vec{n}(s) := \frac{\vec{x}\,''(s)}{|\vec{x}\,''(s)|}$ ... der **Hauptnormalenvektor** von $c$ an der Stelle $s$ (siehe 2.2.12(3))
$\vec{b}(s) := \vec{t}(s) \times \vec{n}(s)$ ... **Binormalenvektor**

$(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s))$ ist eine Rechts-ONB und heißt das **begleitende Dreibein** (kurz: **3-Bein**) oder **Frenet-3-Bein** von $c$ an der Stelle $s$.

$\vec{y} = \vec{x}(s) + v \cdot \vec{t}(s),\ v \in \mathbb{R}$ . . . **Tangente**
$\vec{y} = \vec{x}(s) + v \cdot \vec{n}(s),\ v \in \mathbb{R}$ . . . **Hauptnormale**
$\vec{y} = \vec{x}(s) + v \cdot \vec{b}(s),\ v \in \mathbb{R}$ . . . **Binormale**

$\vec{y} = \vec{x}(s) + v \cdot \vec{t}(s) + w \cdot \vec{n}(s),\ v, w \in \mathbb{R}$
. . . **Schmiegebene**
$\vec{y} = \vec{x}(s) + v \cdot \vec{n}(s) + w \cdot \vec{b}(s),\ v, w \in \mathbb{R}$
. . . **Normal(en)ebene**
$\vec{y} = \vec{x}(s) + v \cdot \vec{t}(s) + w \cdot \vec{b}(s),\ v, w \in \mathbb{R}$
. . . **rektifizierende Ebene**
jeweils von $c$ an der Stelle $s$.

HESSE-Form der Schmiegebene $\sigma$ von $c$ an der Stelle $s$:

$$\sigma: \quad \pm\,\vec{b}(s) \cdot (\vec{y} - \vec{x}(s)) = 0$$

Das ist eine Gleichung in $\vec{y}$. Das Zeichen $+$ steht, falls $\vec{b}(s) \cdot \vec{x}(s) \geq 0$.

### 6.2.16 Berechnung von $\vec{t}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ bei allgemeinem Parameter $t$

$$\vec{x}\,'' = (\dot{\vec{x}} \cdot \frac{dt}{ds})' = \ddot{\vec{x}}(\frac{dt}{ds})^2 + \dot{\vec{x}}\frac{d^2t}{ds^2} \Rightarrow$$

$$\vec{x}\,' \times \vec{x}\,'' = \dot{\vec{x}}\frac{dt}{ds} \times (\ddot{\vec{x}}(\frac{dt}{ds})^2 + \dot{\vec{x}}\frac{d^2t}{ds^2}) =$$

$$= \dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} \cdot (\frac{dt}{ds})^3 \Rightarrow$$

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \frac{\vec{x}\,' \times \vec{x}\,''}{|\vec{x}\,''|} =$$

$$= \frac{\vec{x}\,' \times \vec{x}\,''}{|\vec{x}\,' \times \vec{x}\,''|} = \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}$$

$$\vec{t} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}, \quad \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}$$

### 6.2.17 Bsp: Schraublinie

$$c : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \\ p \cdot t \end{pmatrix},$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ p \end{pmatrix}, \quad \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \cos t \\ -r \cdot \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} rp \cdot \sin t \\ -rp \cdot \cos t \\ r^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} p \cdot \sin t \\ -p \cdot \cos t \\ r \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + p^2}}$$

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ p \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + p^2}}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \begin{pmatrix} (-p^2 - r^2) \cdot \cos t \\ (-r^2 - p^2) \cdot \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r^2 + p^2} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

### 6.2.18 Ableitungsgleichungen von FRENET

Sei $c: \ \vec{x}(s), \ s \in I$, eine reguläre W-Punkt-freie $C^3$-Kurve. Da $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$, gibt es $a_{11}(s), a_{12}(s), \ldots, a_{33}(s)$, mit:

$$\vec{t}\,' = a_{11}\vec{t} + a_{12}\vec{n} + a_{13}\vec{b}$$

$$\vec{n}\,' = a_{21}\vec{t} + a_{22}\vec{n} + a_{23}\vec{b}$$

$$\vec{b}\,' = a_{31}\vec{t} + a_{32}\vec{n} + a_{33}\vec{b}$$

Aus $\vec{t}^2 = 1$ folgt $\vec{t}\vec{t}\,' = 0$, also $a_{11} = 0$.
Aus $\vec{n}^2 = 1$ folgt $\vec{n}\vec{n}\,' = 0$, also $a_{22} = 0$.
Aus $\vec{b}^2 = 1$ folgt $\vec{b}\vec{b}\,' = 0$, also $a_{33} = 0$.

Aus $\vec{t}\vec{n} = 0$ folgt $\vec{t}\,'\vec{n} + \vec{t}\vec{n}\,' = 0$, also $a_{12} + a_{21} = 0$.
Aus $\vec{t}\vec{b} = 0$ folgt $\vec{t}\,'\vec{b} + \vec{t}\vec{b}\,' = 0$, also $a_{13} + a_{31} = 0$.
Aus $\vec{n}\vec{b} = 0$ folgt $\vec{n}\,'\vec{b} + \vec{n}\vec{b}\,' = 0$, also $a_{23} + a_{32} = 0$.

**Bem.:** Die Matrix der $a_{ik}$ ist schiefsymmetrisch, weil $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ eine ONB ist.

Weil $\vec{t} = \vec{x}\,'$, ist $\vec{t}\,' = \vec{x}\,'' =: \kappa\vec{n}$ mit $\kappa = |\vec{x}\,''|$ (siehe 6.2.15).

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \vec{t}\,' &= \phantom{-\kappa\vec{t}}\ \kappa\vec{n} \\ \vec{n}\,' &= -\kappa\vec{t} \phantom{\ \kappa\vec{n}} + \tau\vec{b} \\ \vec{b}\,' &= \phantom{-\kappa\vec{t}}\ -\tau\vec{n} \end{aligned}$$

$\kappa$ ... **Krümmung** von $c$
$\tau$ ... **Torsion** oder **Windung** von $c$
$\frac{1}{\kappa} =: \rho$ ... **Krümmungsradius** von $c$
$\frac{1}{\tau}$ ... **Torsionsradius** von $c$

Berechnung von $\tau$:

$\vec{n} = \frac{\vec{x}''}{\sqrt{(\vec{x}'')^2}} \Rightarrow$

$$\vec{n}' = \frac{\sqrt{(\vec{x}'')^2} \cdot \vec{x}''' - \frac{\vec{x}''\vec{x}'''}{2\sqrt{\vec{x}''^2}} \cdot \vec{x}''}{\vec{x}''^2}$$

$\vec{b} = \frac{\vec{x}' \times \vec{x}''}{|\vec{x}' \times \vec{x}''|}$

$$\tau = \vec{n}' \cdot \vec{b} = \frac{\sqrt{\vec{x}''^2} \cdot \vec{x}''' \cdot (\vec{x}' \times \vec{x}'')}{\vec{x}''^2 |\vec{x}' \times \vec{x}''|}$$

Da $|\vec{x}' \times \vec{x}''| = |\vec{x}''|$ erhält man mit dem Spatprodukt:

$$\tau = \frac{\det(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''')}{\vec{x}''^2}$$

**Satz:** Für das begleitende Dreibein $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ einer regulären W-Punkt-freien auf ihre Bogenlänge $s$ bezogenen $C^3$-Raumkurve $c: \ \vec{x}(s), \ s \in I$, gelten die **Ableitungsgleichungen von Frenet**:

$$\begin{aligned} \vec{t}' &= \phantom{-\kappa\vec{t}} \quad \kappa\vec{n} \\ \vec{n}' &= -\kappa\vec{t} \qquad\qquad + \tau\vec{b} \\ \vec{b}' &= \qquad\quad - \tau\vec{n} \end{aligned}$$

mit $\kappa = |\vec{x}''|$ und $\tau = \frac{\det(\vec{x}', \vec{x}'', \vec{x}''')}{\vec{x}''^2}$.

### 6.2.19 Berechnung von $\kappa$, $\tau$ bei allgemeinem Parameter $t$

$\kappa(s) = |\vec{x}\,''(s)|,\ \tau = \frac{\det(\vec{x}\,',\vec{x}\,'',\vec{x}\,''')}{\vec{x}\,''^2}$

$$\vec{x}\,' = \dot{\vec{x}} \cdot \frac{dt}{ds} = \dot{\vec{x}} \cdot \frac{1}{\dot{s}} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}$$

$$\vec{x}\,'' = \ddot{\vec{x}} \cdot (\frac{1}{\dot{s}})^2 + \dot{\vec{x}} \cdot (\frac{1}{\dot{s}})'$$

$$\vec{x}\,''' = \dddot{\vec{x}} \cdot (\frac{1}{\dot{s}})^3 + \ddot{\vec{x}} \cdot (2(\frac{1}{\dot{s}})(\frac{1}{\dot{s}})' + (\frac{1}{\dot{s}})(\frac{1}{\dot{s}})') + \dot{\vec{x}}(\frac{1}{\dot{s}})''$$

$$\kappa = |\vec{x}\,''| = 1 \cdot |\vec{x}\,''| \cdot 1 = |\vec{x}\,'| \cdot |\vec{x}\,''| \cdot \sin\angle(\vec{x}\,', \vec{x}\,'') =$$

$$= |\vec{x}\,' \times \vec{x}\,''| = |\frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} \times (\frac{\ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|^2} + \ldots) =$$

$$= \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}$$

**Merkregel:** Anzahl der Punkte in Zähler und Nenner!

$$\tau = \frac{\det(\frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|}, \frac{\ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|^2} + \ldots, \frac{\dddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|^3} + \ldots)}{\frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|^2}{|\dot{\vec{x}}|^{3\cdot 2}}} =$$

$$= \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}$$

**Satz:** Ist $c: \ \vec{x}(t), \ t \in I$, eine reguläre W-Punkt-freie $C^3$-Raumkurve, so ist

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}})}{(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2}$$

**6.2.20 Bsp.: Schraublinie**

$$c: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos t \\ r \cdot \sin t \\ p \cdot t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \sin t \\ r \cdot \cos t \\ p \end{pmatrix}, \ \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -r \cdot \cos t \\ -r \cdot \sin t \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\dddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} r \cdot \sin t \\ -r \cdot \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} rp \cdot \sin t \\ -rp \cdot \cos t \\ r^2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}^2 = r^2 + p^2; \quad (\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}})^2 = r^2 \cdot (p^2 + r^2)$$

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|} = \frac{r\sqrt{p^2 + r^2}}{(\sqrt{r^2 + p^2})^3} = \frac{r}{r^2 + p^2}$$

$$\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = p \cdot \det \begin{pmatrix} -r\cos t & r\sin t \\ -r\sin t & -r\cos t \end{pmatrix} = pr^2$$

$$\tau(t) = \frac{pr^2}{r^2(p^2+r^2)} = \frac{p}{r^2+p^2}$$

### 6.2.21 Geometrische Deutung der Krümmung

Seien $\vec{x}\,'(s)$, $\vec{x}\,'(s+h)$ Tangenteneinheitsvektoren einer Kurve an "benachbarten Stellen" $s$ und $s+h$.

$$\omega(h) := \angle(\vec{x}\,'(s), \vec{x}\,'(s+h)$$

$$\lim_{h\to 0} \ \omega(h) = 0 = \lim_{h\to 0} \ h$$

$$\frac{\sin\omega(h)}{h} = \left| \ \frac{\vec{x}\,'(s) \times (\vec{x}\,'(s+h) - \vec{x}\,'(s))}{h} \ \right|$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin\omega(h)}{h} = | \ \vec{x}\,'(s) \times \vec{x}\,''(s) \ | = \kappa(s)$$

Nach de L'Hôpital ist also

$$\kappa(s) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin\omega(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos\omega(h) \cdot \omega'(h)}{1} = \omega'(0)$$

**Exakt:** Die Krümmung $\kappa(s)$ ist der $\lim_{h\to 0}$ des Verhältnisses von $\angle(\vec{t}(s), \vec{t}(s+h))$ zu $h$.

**Ungefähr:** Die Krümmung $\kappa$ ist ein Maß für die Abweichung der Kurve vom geradlinigen Verlauf.

### 6.2.22 Geometrische Deutung des Betrags der Torsion

$\sigma(s)$ . . . Schmiegebene von $c$ an der Stelle $s$

Analog zu 6.2.21 zeigt man:

**Exakt:** Bis auf das Vorzeichen ist die Torsion $\tau(s)$ der $\lim_{h\to 0}$ des Verhältnisses von $\angle(\sigma(s), \sigma(s+h))$ zu $h$.

**Ungefähr:** Die Torsion $\tau$ ist ein Maß für die Abweichung der Kurve vom ebenen Verlauf.

## 6.2.23 Zur Schmiegebene

$c : \vec{x}(s), \ s \in I$, eine W-Punkt-freie $C^2$-Kurve:

Skizze

Liegen $\vec{x}(s)$, $\vec{x}(s+h)$, $\vec{x}(s+k)$ nicht auf einer Geraden, so bestimmen sie eindeutig eine Ebene $\varepsilon(s,h,k)$, für die gilt: $\lim_{h,k\to 0} \varepsilon(s,h,k) = \sigma(s) =$ Schmiegebene von $c$ an der Stelle $s$. (ohne Beweis)

**Sprechweise:** $c$ berührt an der Stelle $s$ die Schmiegebene $\sigma(s)$ **dreipunktig** oder **von zweiter Ordnung**.

## 6.2.24 Zum Krümmungskreis

$c : \vec{x}(s),\ s \in I$, eine reguläre $C^2$-Kurve:

Liegen $\vec{x}(s)$, $\vec{x}(s+h)$, $\vec{x}(s+l)$ nicht auf einer Geraden, so bestimmen sie eindeutig einen Kreis $k(s,h,l)$, für den gilt: $\lim_{h,l\to 0} k(s,h,l)$, der **Krümmungskreis** von $c$ an der Stelle $s$, existiert, wenn $\kappa(s) \neq 0$. Sein Mittelpunkt ist

$$\vec{m}(s) := \vec{x}(s) + \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \vec{n}(s),$$

der **Krümmungsmittelpunkt** von $c$ an der Stelle $s$.

Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte von $c$ mit der PD $\vec{m}(s),\ s \in I$, heißt die **Evolute** von $c$.

**Sprechweise:** $c$ berührt an der Stelle $s$ den Krümmungskreis **dreipunktig** oder **von zweiter Ordnung**.

**6.2.25 Hauptsatz der Kurventheorie**

**Vor.:** $I$ ein Intervall, $\kappa : I \to \mathbb{R}$ eine $C^1$-Funktion mit $\kappa(s) > 0 \ \forall \ s \in I$, $\tau : I \to \mathbb{R}$ stetig.

**Beh.:** Es gibt eine $C^3$-Kurve $c: \ \vec{x}(s), \ s \in I$, mit der Bogenlänge $s$, der Krümmung $\kappa$ und der Torsion $\tau$. Die Kurve ist eindeutig bestimmt bis auf gleichsinnige Bewegungen.

**Bew.:** ohne

### 6.2.26 Kurven mit konstanter Krümmung und Torsion

Wegen 6.2.20 und 6.2.25 gilt: Jede Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa > 0$ und konstanter Torsion $\tau \in \mathbb{R}$ ist eine Schraublinie.

Herleitung:

Aus 6.2.20: $\kappa = \frac{r}{r^2+p^2},\ \tau = \frac{p}{r^2+p^2} \Rightarrow$
$\frac{p}{r} = \frac{\tau}{\kappa} \Rightarrow$

$$\kappa = \frac{\frac{1}{r}}{1+(\frac{p}{r})^2} \Rightarrow r = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{1+(\frac{p}{r})^2} =$$

$$= \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{1}{1+(\frac{\tau}{\kappa})^2} = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}$$

$$p = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}$$

Damit ist zu geg. $\kappa$ und $\tau$ die Schraublinie bestimmt.

$p = 0 \ldots$ Kreis mit Radius $\frac{1}{\kappa}$