Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. J. Hartl, Dr. H. Vogel

WS 2012/13
Blatt 10

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

Tutoraufgaben:

T24. Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ eine $C^\infty-$Kurve c durch die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

a) Zeigen Sie, dass $\vec{x}(t)$ auf $(-\pi, \pi)$ regulär und einfach ist.

b) Bestimmen Sie die Tangenten von c im Anfangs- und Endpunkt A, E von c.

c) Berechnen Sie die Länge s des Kurvenbogens von c (Schleife AE).

d) Bestimmen Sie eine Gleichung der Schmiegebene σ von c im Punkt $\vec{x}(t)$ in Abhängigkeit von t. In welchen Punkten von c enthält die Schmiegebene den Punkt $R(0, 0, 6)$?

e) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ und die Torsion $\tau(t)$ von c in Abhängigkeit des Parameters t. In welchen Punkten von c ist die Krümmung $\kappa(t)$ extremal ?

f) Skizzieren Sie die Normalprojektion c^* von c in die $yz-$Ebene in einem $yz-$Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1cm.

T25. Gegeben ist die (nichtebene) "kubische Parabel"

$$c \subset \mathbb{R}^3 : \ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 4 - 3t^2 \\ 6t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass c eine reguläre, doppelpunkt- und W-punktfreie Kurve ist.

b) Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$, die Krümmung $\kappa(t)$ und die Torsion $\tau(t)$ von c.

c) Bestimmen Sie das Frenet-Dreibein $\{\vec{t}(t), \vec{n}(t), \vec{b}(t)\}$ der Kurve c.

d) Zeigen Sie, dass c eine Böschungslinie ist, d.h.:

Es gibt eine Richtung $\vec{a} \neq \vec{o}$ und einen Winkel $\alpha \in [0, \pi]$, so dass

$$\frac{\dot{\vec{x}}(t) \cdot \vec{a}}{|\dot{\vec{x}}(t)| \cdot |\vec{a}|} = \cos(\alpha) \quad \text{für alle} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Anmerkung: Alle Kurventangenten haben den selben Winkel α zur Richtung $\vec{a}$, d.h. die Kurve hat in jedem Punkt die selbe Steigung gegenüber einer Ebene senkrecht zur Richtung $\vec{a}$.

Hausaufgaben:

H22. Gegeben sei im $\mathbb{R}^3$ eine $C^\infty-$Kurve c durch die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) := \begin{pmatrix} \sin t \\ \frac{1}{2}\sin^2 t \\ \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t) \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

a) Zeigen Sie, dass der Kurvenparameter t die Bogenlänge s von c ist.
Warum ist damit c sicher regulär ?

b) Bestimmen Sie die Schnittgerade g der Schmiegebenen $\sigma(0)$ und $\sigma(\frac{\pi}{2})$ von c.

c) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(s)$ und die Torsion $\tau(s)$ von c in Abhängigkeit der Bogenlänge s.

d) Zeigen Sie, dass die Normalprojektion c^* von c in die $xy-$Ebene in einer Parabel liegt und geben Sie diese in expliziter Darstellung an.

H23. Durch die Parameterdarstellung

$$c \subset \mathbb{R}^3 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t\cos t - \sin t \\ t\sin t + \cos t \\ t^2 + 1 \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

ist eine Raumkurve c gegeben.

a) Zeigen Sie, dass c eine reguläre, doppel- und W-punktfreie Kurve ist.

b) Geben Sie eine Parameterdarstellung von c nach ihrer Bogenlänge s an.

c) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ und die Torsion $\tau(t)$ von c.

d) Zeigen Sie, dass c eine Böschungslinie ist, siehe **T 25**.

e) Zeigen Sie, dass die Kurve c auf dem Drehparaboloid $\Phi : x^2 + y^2 - z = 0$ liegt.

Abgabetermin: Donnerstag, 24. Januar 2013, in der Übung