Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. J. Hartl, Dr. H. Vogel

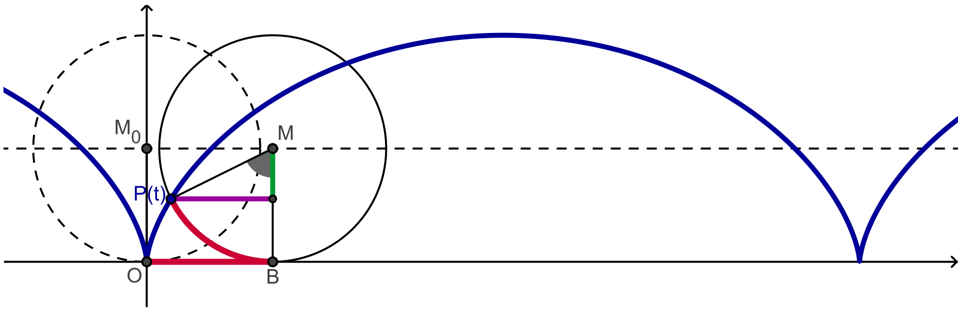
WS 2012/13
Blatt 9

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

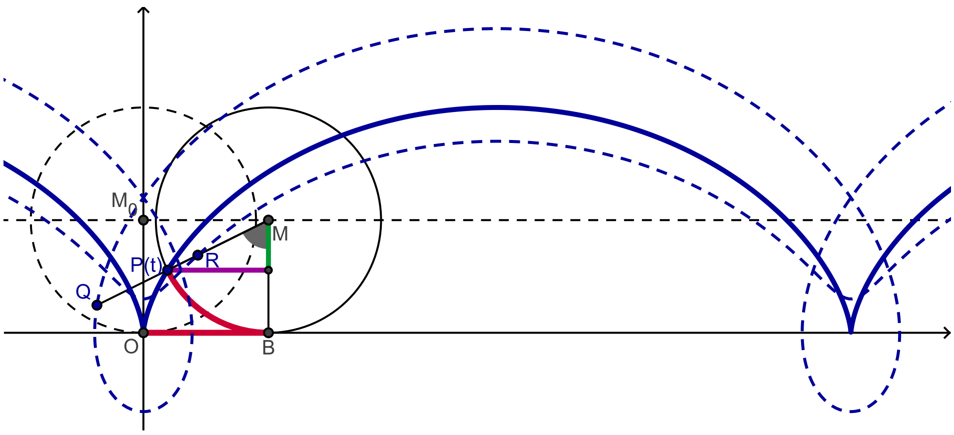
Tutoraufgaben:

T22. Eine Kreisscheibe mit Radius 1 rollt in der xy-Ebene die x-Achse entlang. Die durch einen festen Punkt auf dem Rand der Kreisscheibe beschriebene Kurve c heißt ***Zykloide***. Bestimmen Sie:

a) eine Parameterdarstellung von c,
b) die singulären Punkte von c,
c) die Länge von c zwischen zwei benachbarten singulären Punkten.



Zusatz: Punkte Q, R, die fest mit dem Kreis verbunden sind, beschreiben bei der Rollbewegung ***verkürzte bzw. verlängerte Zykloiden***, wenn ihr Abstand vom Kreismittelpunkt M kleiner oder größer als der Kreisradius 1 ist.



Begründen Sie, warum diese Zykloiden keine singulären Stellen haben.

T23. Gegeben sei die Parameterdarstellung einer ebenen $C^\infty-$Kurve durch:

$$c:\ \vec{x}(u) = \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\,,\ \frac{u-u^3}{1+u^2}\right)^T\,, \quad u \in \mathbb{R}.$$

a) Untersuchen Sie c auf singuläre Stellen und Doppelpunkte.
b) Skizzieren Sie den Verlauf von c.
c) Zeigen Sie, dass $f:\left\{\begin{array}{ccl}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & u=f(v):=\tan v \end{array}\right.$ eine zulässige Parametertransformation von c ist. Geben Sie die neue Parameterdarstellung von c an.

Hausaufgaben:

H20. Gegeben sei die $C^\infty-$Abbildung $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}$

sowie die $C^\infty-$Funktion $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$, $t = f(u) = \tan(u)$

Zeigen Sie:

a) Die Abbildung x ist injektiv, d.h. $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$.

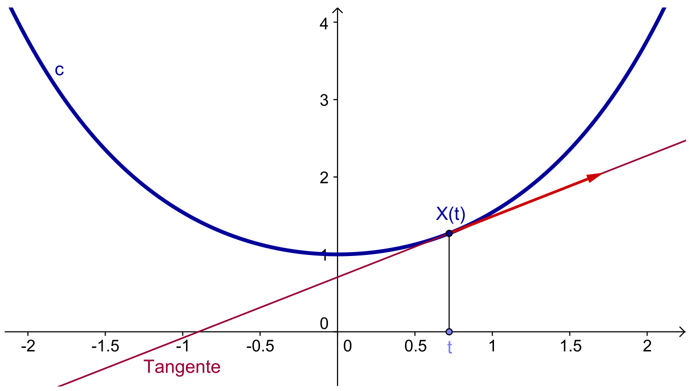
b) Die Funktion f ist bijektiv, d.h. injektiv und surjektiv, d.h. zu jedem $t \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $u \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, so dass $f(u) = t$.

c) Die Komposition $y := x \circ f$ ist 3-mal stetig nach t differenzierbar. Geben Sie dazu die ersten Ableitungen von y mit Hilfe der Ableitungen von x und f an.

d) Betrachten Sie nun $y := x \circ f$, d.h. $\vec{y}(u) = \vec{x}(f(u)) = \begin{pmatrix} 3\tan^2 u \\ 2\tan^3 u \end{pmatrix}$ und berechnen Sie die 3. Ableitung $\frac{d^3\vec{y}}{du^3}$ an der Stelle $u = \frac{\pi}{4}$. Ist y injektiv?

H21. Eine Kettenlinie kann durch $c: \ \vec{x}(t) = (t\,, \cosh t)^T$, $t \in \mathbb{R}$ parametrisiert werden.

Bestimmen Sie die Bogenlänge $s = s(t)$ von c von $\vec{x}(0)$ bis $\vec{x}(t)$ und stellen Sie c in Abhängigkeit der Bogenlänge s dar.



Abgabetermin: Donnerstag, 17. Januar 2013, in der Übung