Technische Universität München
Zentrum Mathematik
Prof. J. Hartl, Dr. H. Vogel

WS 2012/13
Blatt 2

Geometrie für das Lehramt an beruflichen Schulen

Euklidische Strenge

Tutoraufgaben:

T4. Das 3. Postulat im ersten Buch der Elemente von Euklid ist so zu verstehen, dass man mit jedem gegebenen Punkt als Mittelpunkt durch jeden gegebenen Punkt einen Kreis zeichnen kann. Es bedeutet nicht, dass man an einer Stelle der Ebene einen Abstand mit dem Zirkel abgreifen kann und mit diesem Abstand als Radius einen Kreis um einen gegebenen Punkt zeichnen kann.

Euklid gibt in § 1 des ersten Buches der Elemente eine Konstruktion an, mit der man über jeder gegebenen Strecke als Seite ein gleichseitiges Dreieck errichten kann.

a) Wie kann man damit die Aufgabe lösen, die sich Euklid in § 2 stellt: "An einem gegebenen Punkte eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke hinzulegen."

b) Wie kann man im Anschluss daran die Aufgabe lösen, die sich Euklid in § 3 stellt: "Wenn zwei ungleiche Strecken gegeben sind, auf der größeren eine der kleineren gleiche Strecke abzutragen."

T5. Euklid beweist in § 13 des ersten Buches der Elemente den Satz: "Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, Winkel bildet, dann muß sie entweder zwei Rechte oder solche, die zusammen zwei Rechten gleich sind, bilden." Wie kann man damit den Satz beweisen, den Euklid in § 15 formuliert:

"Zwei gerade Linien bilden, wenn Sie einander schneiden, Scheitelwinkel, die einander gleich sind."

T6. Gegeben sei eine affine Ebene $(E, \mathfrak{G})$ mit endlich vielen Punkten ($|E| \in \mathbb{N}$).
Zeigen Sie: Dann gibt es eine natürliche Zahl $q \in \mathbb{N}$ so, dass gilt:

a) Auf jeder Geraden liegen genau q Punkte und zu einer Geraden gibt es genau q parallele Geraden.

b) Durch jeden Punkt gehen genau $q + 1$ Geraden.

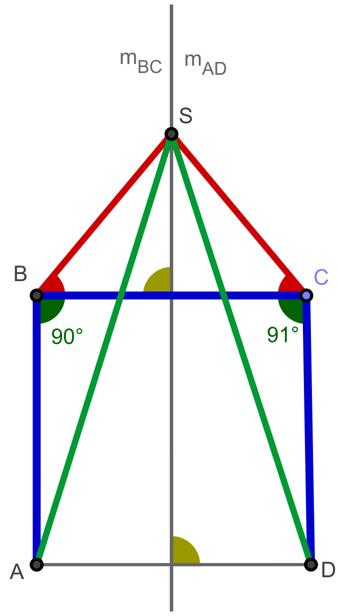
c) Die Punktmenge E enthält genau q^2 Punkte.

d) Die Geradenmenge $\mathfrak{G}$ enthält genau $q^2 + q$ Geraden.

Hausaufgaben:

H3. Wo steckt der Fehler ?

Gegeben sei das Viereck $ABCD$ mit gleichlangen Seiten $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ und den Winkeln $\sphericalangle ABC = 90°$ und $\sphericalangle BCD = 91°$ (vgl. Figur):



Sei $S = m_{BC} \cap m_{AD}$ der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m_{BC} und m_{AD} über den Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$.

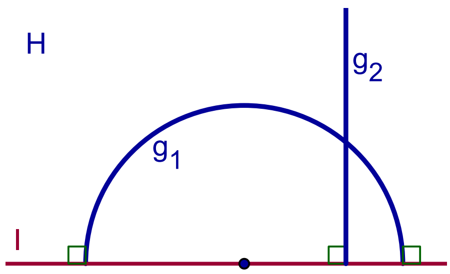
Dann gilt aus Symmetriegründen:
$\overline{BS} = \overline{CS}$, $\overline{AS} = \overline{DS}$ $\Rightarrow$ Die Dreiecke ABS und DCS sind kongruent und $\sphericalangle ABS = \sphericalangle DCS$.
Da das Dreieck BCS gleichschenklig ist, gilt:
$\sphericalangle CBS = \sphericalangle BCS$, woraus $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DCB$ folgt,

d.h. **90°=91°** !

Hinweis: Obige Argumentation gilt offenbar unabhängig vom Winkel $\sphericalangle BCD \neq 90°$.

H4. *POINCARE-sches Halbebenenmodell der hyperbolischen Ebene*

In der reellen Koordinatenebene $\mathbb{R}^2$ seien:
$l := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y = 0\}$ die x-Achse,
$H := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y > 0\}$ die obere Halbebene,
$\mathfrak{K}$ die Menge aller Kreise und Geraden von $\mathbb{R}^2$, die l orthogonal schneiden, und $\mathfrak{G} := \{k \cap H | \, k \in \mathfrak{K}\}$.



a) Zeigen Sie, dass die Punktmenge H zusammen mit der Geradenmenge $\mathfrak{G}$ ein Inzidenzraum ist.

b) Begründen Sie, warum $(H, \mathfrak{G})$ keine affine Ebene ist.

Abgabetermin: Donnerstag, 8. November 2012, in der Übung