

7.6 Flächenkrümmungen

Flächenkrümmung hat etwas zu tun mit der Änderung des Normaleneinheitsvektors.

7.6.1 Zweite Grundform der Flächentheorie

$\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, regul. C^2 -Fläche,

$$\vec{n} := \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|}$$

$$\vec{x}_{uu} \cdot \vec{n} =: h_{11},$$

$$\vec{x}_{uv} \cdot \vec{n} =: h_{12} = h_{21} := \vec{x}_{vu} \cdot \vec{n},$$

$$\vec{x}_{vv} \cdot \vec{n} =: h_{22}.$$

Damit heißt

$$II(a_1, a_2) = a_1^2 h_{11} + 2a_1 a_2 h_{12} + a_2^2 h_{22}$$

die **zweite Grundform der Flächentheorie**.

7.6.2 Berechnungen der h_{jk}

$$\vec{n}\vec{x}_u = 0 \Rightarrow \vec{n}_u\vec{x}_u + \vec{n}\vec{x}_{uu} = 0 \Rightarrow$$

$$h_{11} = -\vec{n}_u\vec{x}_u$$

$$\vec{n}\vec{x}_u = 0 \Rightarrow \vec{n}_v\vec{x}_u + \vec{n}\vec{x}_{uv} = 0 \Rightarrow$$

$$h_{12} = -\vec{n}_v\vec{x}_u$$

$$\vec{n}\vec{x}_v = 0 \Rightarrow \vec{n}_u\vec{x}_v + \vec{n}\vec{x}_{vu} = 0 \Rightarrow$$

$$h_{21} = -\vec{n}_u\vec{x}_v = -\vec{n}_v\vec{x}_u$$

$$\vec{n}\vec{x}_v = 0 \Rightarrow \vec{n}_v\vec{x}_v + \vec{n}\vec{x}_{vv} = 0 \Rightarrow$$

$$h_{22} = -\vec{n}_v\vec{x}_v$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\sqrt{g}} \Rightarrow$$

$$h_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \det(\vec{x}_{uu}\vec{x}_u\vec{x}_v)$$

$$h_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \det(\vec{x}_{uv}\vec{x}_u\vec{x}_v) = h_{21}$$

$$h_{22} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \det(\vec{x}_{vv}\vec{x}_u\vec{x}_v)$$

7.6.3 Satz von MEUSNIER

$\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, reguläre C^2 -Fläche,
 $c : \vec{x}(s) := \vec{x}(u(s), v(s)), s \in I$, reguläre
W-Punkt-freie C^2 -Flächenkurve von Φ , s
Bogenlänge von c ,

$$\vec{n} := \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\sqrt{g}},$$

τ Tangentenebene von Φ in $\vec{x}(s)$,

σ Schmiegebene von c in $\vec{x}(s)$.

Dann gilt: $\vec{x}''\vec{n} = \kappa\vec{n}_c\vec{n}$, wobei

κ ... Krümmung von c

\vec{n}_c ... Hauptnormalenvektor von c ,

also

$$\vec{x}''\vec{n} = \kappa \cos \angle(\vec{n}_c, \vec{n}) = \kappa \sin \angle(\sigma, \tau).$$

Tafelskizze

Andererseits ist

$$\vec{x}' = \vec{x}_u u' + \vec{x}_v v',$$

$$\vec{x}'' = \vec{x}_{uu} u'^2 + 2\vec{x}_{uv} u'v' + \vec{x}_{vv} v'^2 + \vec{x}_u u'' + \vec{x}_v v'',$$

also

$$\begin{aligned} \vec{x}''\vec{n} &= h_{11}u'^2 + 2h_{12}u'v' + h_{22}v'^2 = \\ &= \frac{h_{11}\dot{u}^2 + 2h_{12}\dot{u}\dot{v} + h_{22}\dot{v}^2}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \end{aligned}$$

Satz: $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, reguläre C^2 -Fläche,

$c : \vec{x}(t) := \vec{x}(u(t), v(t)), t \in I$, reguläre W-Punkt-freie C^2 -Flächenkurve von Φ ,

$\kappa(t)$... Krümmung von c

τ Tangentenebene von Φ an der Stelle $(u(t), v(t))$,

σ Schmiegebene von c an der Stelle t .

Dann ist

$$\begin{aligned} \kappa \cdot \sin \angle(\sigma, \tau) &= \frac{h_{11}\dot{u}^2 + 2h_{12}\dot{u}\dot{v} + h_{22}\dot{v}^2}{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2} = \\ &= \frac{II(\dot{u}, \dot{v})}{I(\dot{u}, \dot{v})} =: \kappa_n \end{aligned}$$

κ_n ... **Normal(schnitt)krümmung** von Φ an der Stelle (u, v) in Richtung (\dot{u}, \dot{v}) .

Korollar: Sei P ein einfacher Punkt einer regulären C^2 -Fläche Φ . Dann gilt: Alle regulären C^2 -Flächenkurven von Φ , für die P ein einfacher Punkt und kein W-Punkt ist, die in P dieselbe Tangente und dieselbe Schmiegebene besitzen, die nicht Tangentenebene von Φ in P ist, haben in P dieselbe Krümmung.

Satz: MEUSNIER

Vor. wie im Satz vorher. Dann gilt:

$$R = R_n \sin \angle(\sigma, \tau)$$

Dabei: R ... Krümmungsradius von c

R_n ... $\frac{1}{\kappa_n}$ Normalschnittkrümmungsradius von Φ in Richtung (\dot{u}, \dot{v}) .

Tafelskizze: Meusnier-Kugel, Fläche Φ , Kurventangente im Punkt P projizierend, τ, σ , Krümmungskreis von c , R, R_n

Bem.: Für alle Schnitte einer regulären C^2 -Fläche mit Ebenen durch eine feste Tangente in einem festen Flächenpunkt gilt: Die Krümmungsachse jedes schiefen Schnittes geht durch den Krümmungsmittelpunkt des Normalschnittes.