

7.4 Flächenabbildung

Tafelskizze: Flächen Φ und Φ^* , zugehörige Parametergebiete G und G^* , Flächenabbildung $\alpha : \Phi \rightarrow \Phi^*$, Parameterdarstellungen \vec{x} und \vec{x}^* , Punkt P von Φ mit Bildpunkt $P^* = \alpha P$ von Φ^*

7.4.1 Beschreibung von Flächenabbildungen

Eine bijektive C^r -**Abbildung** α einer einfachen C^r -Fläche $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, auf eine einfache C^r -Fläche $\Phi^* : \vec{x}^*(u^*, v^*), (u^*, v^*) \in G^*$, wird beschrieben durch eine C^r -Abbildung $G \rightarrow G^*$, nämlich $(\vec{x}^*)^{-1} \circ \alpha \circ \vec{x} : G \rightarrow G^*, (u, v) \mapsto (u^*(u, v), v^*(u, v))$.

Das erinnert an eine PT, ist aber zunächst keine.

7.4.2 Kanonische Beschreibung von Flächenabbildungen

PT auf $\Phi^* : G \rightarrow G^*, (u, v) \mapsto (u^*(u, v), v^*(u, v))$.

Jetzt sind Φ und Φ^* auf gleiche Parameter (u, v) bezogen, und zu $P^* = \alpha P$ gehören dieselben Parameterwerte wie zu P .

Die Flächen Φ und Φ^* sind **in kanonischer Weise** aufeinander abgebildet.

7.4.3 Def.: Eine bijektive C^r -Abbildung zweier einfacher C^1 -Flächen Φ, Φ^* aufeinander heißt

- a) **längentreu** (isometrisch) $:\Leftrightarrow$ Entsprechende Kurven auf Φ und Φ^* haben stets gleiche Länge.
- b) **winkeltreu (konform)** $:\Leftrightarrow$ Entsprechende Kurvenpaare auf Φ und auf Φ^* haben stets gleiche Schnittwinkel.
- c) **flächentreu** $:\Leftrightarrow$ Entsprechende Flächenstücke auf Φ und Φ^* haben stets gleiche Flächeninhalte.

7.4.4 Satz: Zwei reguläre C^1 -Flächen
 $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, und
 $\Phi^* : \vec{x}^*(u, v), (u, v) \in G$, seien durch eine
Flächenabbildung α in kanonischer Weise
aufeinander abgebildet. Dann gilt: α ist

a) längentreu (isometrisch) $:\Leftrightarrow g_{jk}^* = g_{jk} \forall (u, v) \in G$.

b) winkeltreu (konform) $:\Leftrightarrow g_{12}^* : g_{11}^* : g_{22}^* = g_{12} : g_{11} : g_{22} \forall (u, v) \in G$.

c) flächentreu $:\Leftrightarrow g^* = g \forall (u, v) \in G$.

Bew.: zu **a)**: Für jede u -Linie $\vec{x}(u, v_0)$ und
jede Anfangsstelle (u_0, v_0) gilt:

$$\int_{u_0}^{u_1} |\vec{x}_u(u, v_0)| du = \int_{u_0}^{u_1} |\vec{x}_u^*(u, v_0)| du$$

$$\Rightarrow |\vec{x}_u(u_1, v_0)|^2 = |\vec{x}_u^*(u_1, v_0)|^2$$

$$\Rightarrow g_{11}(u_1, v_0) = g_{11}^*(u_1, v_0) \forall (u_1, v_0) \in G.$$

g_{22} analog mit v -Linien.

Außerdem für $\vec{x}(u_0 + t, v_0 + t)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^t \sqrt{(\vec{x}_u \cdot 1 + \vec{x}_v \cdot 1)^2} d\tau = \\ &= \int_0^t \sqrt{g_{11} + 2g_{12} + g_{22}} d\tau = \int_0^t \sqrt{g_{11}^* + 2g_{12}^* + g_{22}^*} d\tau \\ &\Rightarrow \sqrt{g_{11} + 2g_{12} + g_{22}} = \sqrt{g_{11}^* + 2g_{12}^* + g_{22}^*} \\ &\Rightarrow g_{11} + 2g_{12} + g_{22} = g_{11}^* + 2g_{12}^* + g_{22}^* \\ &\qquad\qquad\qquad \Rightarrow g_{12} = g_{12}^* \end{aligned}$$

Ausführlicher:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow g_{12}(u_0 + t, v_0 + t) = g_{12}^*(u_0 + t, v_0 + t) \\ &\forall (u_0, v_0) \in G \text{ und für alle erlaubten } t, \text{ z.B.} \\ &\text{auch } t = 0. \end{aligned}$$

zu **b)**: Ähnlich, sogar ohne Integral.

zu **c)**: Plausibel, aber Beweis Aufgabe der Analysis, nicht der Geometrie.

7.4.5 Korollar: Für eine bijektive C^1 -Flächenabbildung $\alpha : \Phi \rightarrow \Phi^*$, wobei Φ, Φ^* einfache Flächen sind, gilt: α längentreu $\Leftrightarrow \alpha$ winkeltreu und flächentreu

Bew.: Das folgt unmittelbar aus 7.4.4.