7.2 Messen auf Flächen

Kann man Informationen zu einer Fläche so angeben, dass es möglich ist, aus Flächenparametern und Flächenkoordinaten von Flächenvektoren — ohne Rückgriff auf den umgebenden Raum — zu berechnen:

- Längen von Flächenkurven?
- Winkel schneidender Flächenkurven?
- Oberflächen von Flächenstücken?

7.2.1 Die erste Grundform der Flächentheorie

Sei Φ : $\vec{x}(u,v)$, $(u,v) \in G$, eine reguläre C^1-Fläche. Dann heißen

$$g_{11}(u,v) := \vec{x}_u(u,v) \cdot \vec{x}_u(u,v) =: E(u,v),$$

$$g_{12} := \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v =: g_{21} =: F, \;\; g_{22} := \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v =: G$$

die **Fundamentalgrößen 1. Art** oder die **metrischen Fundamentalgrößen** oder die **Koeffizienten der 1. Grundform** von Φ.

Die Bezeichnungen E, F, G stammen noch von Gauß aus den "Disquisitiones generales circa superficies curvas" (1828).

Determinante der 1. Grundform:

$$\det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 =: g$$

Normalenvektor von Φ:

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v$$

Länge des Normalenvektors:

$$(\vec{x}_u \times \vec{x}_v)^2 = \vec{x}_u^2\ \vec{x}_v^2 - (\vec{x}_u\ \vec{x}_v)^2 =$$

$$= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = g$$

Nomaleneinheitsvektor von Φ:

$$\vec{n} := \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\sqrt{g}}$$

7.2.2 Länge einer Flächenkurve

$c\ :\ \vec{x}(u(t), v(t)),\ t \in I$ reguläre C^1-Flächenkurve einer regulären C^1-Fläche $\Phi :\ \vec{x}(u, v),\ (u, v) \in G$.

Dann ist die Länge eines Kurvenstücks von c:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\vec{x}}(u(t), v(t))|\ dt$$

mit

$$\dot{\vec{x}}(u(t), v(t))^2 = (\vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v})^2 =$$

$$= \vec{x}_u^2 \dot{u}^2 + \vec{x}_u \vec{x}_v \dot{u}\dot{v} + \vec{x}_v \vec{x}_u \dot{v}\dot{u} + \vec{x}_v^2 \dot{v}^2 =$$

$$= g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2.$$

Satz: Ist eine reguläre C^1-Flächenkure c einer regulären C^1-Fläche $\Phi\ :\ \vec{x}(u, v),\ (u, v) \in G$, gegeben durch $(u(t), v(t)),\ t \in [t_1, t_2]$, so gilt für die Länge s von c:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}\ dt.$$

Die quadratische Form

$$I(a_1, a_2) := g_{11}a_1^2 + 2g_{12}a_1a_2 + g_{22}a_2^2$$

heißt die **1. Grundform** oder **1. Fundamentalform** von Φ (an der Stelle (u, v)).

7.2.3 Skalarprodukt und 1. Grundform

Sind $\vec{a} = a_1\vec{x}_u + a_2\vec{x}_v$ und $\vec{b} = b_1\vec{x}_u + b_2\vec{x}_v$ aus dem TVR einer Fläche Φ an einer Stelle (u_0, v_0), so ist

$$\vec{a}\,\vec{b} = g_{11}a_1b_1 + g_{12}a_1b_2 + g_{21}a_2b_1 + g_{22}a_2b_2 =$$

$$= g_{11}a_1b_1 + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{22}a_2b_2$$

das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die symmetrische Bilinearform, die zu der quadratischen Form $I(\ldots)$ gehört.

7.2.4 Winkel zweier Flächenvektoren

Sind $\vec{o} \neq \vec{a} = a_1\vec{x}_u + a_2\vec{x}_v$ und $\vec{o} \neq \vec{b} = b_1\vec{x}_u + b_2\vec{x}_v$ zwei Flächenvektoren einer Fläche Φ an einer Stelle (u_0, v_0), so ist

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) =$$

$$= \frac{g_{11}a_1b_1 + g_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + g_{22}a_2b_2}{\sqrt{I(a_1, a_2)}\sqrt{I(b_1, b_2)}}.$$

7.2.5 Winkel zwischen Flächenkurven

Seien c_1, c_2 zwei C^1-Flächenkurven auf einer C^1-Fläche $\Phi : \ \vec{x}(u, v), \ (u, v) \in G$, gegeben durch:

$$c_1 : \ (u_1(t), v_1(t)), \ t \in I,$$

$$c_2 : \ (u_2(w), v_2(w)), \ w \in J,$$

mit

$$(u_1(t_0), v_1(t_0)) = (u_2(w_0), v_2(w_0)) =: (u_0, v_0),$$

wobei

$$\left\{ \begin{array}{c} t_0 \\ w_0 \\ (u_0, v_0) \end{array} \right\} \text{ reguläre Stelle von } \left\{ \begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \Phi \end{array} \right\}.$$

Dann ist der Winkel φ von c_1 und c_2 an der Stelle (u_0, v_0) gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{g_{11}\dot{u}_1\dot{w}_1 + g_{12}(\dot{u}_1\dot{w}_2 + \dot{u}_2\dot{w}_1) + g_{22}\dot{u}_2\dot{w}_2}{\sqrt{I(\dot{u}_1,\dot{u}_2)}\sqrt{I(\dot{w}_1,\dot{w}_2)}}.$$

Dabei bezeichnet " $\dot{}$ " die Ableitung nach t und die nach w.

7.2.6 Winkel mit Parameterlinien

Sei c_1 eine u-Linie einer regulären C^1-Fläche Φ, c_2 eine beliebige Flächenkurve von Φ. Dann ist

$$\dot{u}_1 = 1, \dot{u}_2 = 0$$

und

$$\cos\varphi = \frac{g_{11}\dot{w}_1 + g_{12}\dot{w}_2}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{I(\dot{w}_1,\dot{w}_2)}}.$$

Sei zusätzlich c_2 eine v-Linie, also

$$\dot{w}_1 = 0, \dot{w}_2 = 1.$$

Dann ist

$$\cos\varphi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Die Parameterlinien bilden ein orthogonales Netz auf $\Phi \Leftrightarrow g_{12} = 0\ \forall\ (u,v) \in G$.

7.2.7 Oberfläche eines Flächenstücks: Motivation:

Tafelskizze: Fläche Φ mit einer Masche des Parameternetzes mit Parameterwerten (u_i, v_k), (u_{i+1}, v_k), (u_i, v_{k+1}), (u_{i+1}, v_{k+1}).

Fläche einer Masche des Gitters näherungsweise:

$$|(\vec{x}(u_{i+1}, v_k) - \vec{x}(u_i, v_k)) \times (\vec{x}(u_i, v_{k+1}) - \vec{x}(u_i, v_k))|$$

$$\approx |\vec{x}_u(u_i, v_k)(u_{i+1} - u_i) \times \vec{x}_v(u_i, v_k)(v_{k+1} - v_k)|$$

Die Oberfläche von Φ wird angenähert durch

$$\sum_i \sum_k |\vec{x}_u(u_i, v_k) \times \vec{x}_v(u_i, v_k)| \Delta u_i \Delta v_k =$$

$$= \sum_i \sum_k \sqrt{g(u_i, v_k)} \Delta u_i \Delta v_k$$

7.2.8 Oberfläche eines Flächenstücks: Def.:

Sei $\Phi: \ \vec{x}(u,v), \ (u,v) \in G$, eine reguläre C^1-Fläche. Sei $D \subset G$ ein abgeschlossenes Gebiet und Ψ das zugehörige Flächenstück von Φ. Dann heißt

$$O := \int\int_D \sqrt{g}\ du\ dv$$

die Oberfläche von Ψ.

7.2.9 Bsp.: Oberfläche einer Drehfläche

Sei

$$m: \ \vec{m}(v) \ := \ \begin{pmatrix} r(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}, \ v \in I,$$

eine C^1-Kurve und

$$\Phi: \ \vec{x}(u,v) := \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{m}(v) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos u \cdot r(v) \\ \sin u \cdot r(v) \\ z(v) \end{pmatrix}, \ (u,v) \in G := [0, 2\pi] \times I$$

eine **Drehfläche** mit dem **Meridian** m und der z-Achse als **Drehachse**.

$$\vec{x}_u = \begin{pmatrix} -\sin u \cdot r(v) \\ \cos u \cdot r(v) \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_v = \begin{pmatrix} \cos u \cdot \dot{r}(v) \\ \sin u \cdot \dot{r}(v) \\ \dot{z}(v) \end{pmatrix}.$$

$g_{11} = \vec{x}_u^2 = r^2$, $g_{12} = \vec{x}_u \vec{x}_v = 0, g_{22} = \vec{x}_v^2 = \dot{r}^2 + \dot{z}^2$.

Bem.: Die Meridiane und die **Breitenkreise** bilden auf jeder regulären C^1-Drehfläche ein orthogonales Netz.

$$O = \int_0^{2\pi} \int_I r\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}\; dv\; du =$$

$$= 2\pi \int_I r\sqrt{\dot{r}^2 + \dot{z}^2}\; dv.$$

Bem.: In dieser Formel wird O für Drehflächen zu einem Einfach-Integral.