

7 Flächen

7.1 Flächenbegriff

7.1.1 Beispiel: Kugel

Kugel im Raum:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \dots \text{implizite Darstellung}$$

Tafelskizze zur Parameterdarstellung:

Viertelkugel mit $x, y, z \geq 0$

$$x = r \cos u \cos v$$

$$y = r \cos u \sin v$$

$$z = r \sin u$$

Bei "Erdkugel":

u ... "geographische Breite"

v ... "geographische Länge"

7.1.2 Def.: Fläche

Eine $(C^r\text{-})$ **Fläche** Φ in \mathbb{E}^3 ist gegeben durch

eine C^r -Abb. \vec{x} eines Gebiets $G \subset \mathbb{R}^2$ in den \mathbb{R}^3 ($r \geq 1$):

$$\vec{x} : G \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\vec{x} : (u, v) \mapsto \vec{x}(u, v).$$

\vec{x} ... **Parameterdarstellung**, kurz: **PD**

G ... **Parametergebiet**

Tafelskizze dazu

Schreibweisen u.a.: $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G,$

$$\begin{aligned} \vec{x}(u, v) &= \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(u, v) \\ x_2(u, v) \\ x_3(u, v) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1(u_1, u_2) \\ x_2(u_1, u_2) \\ x_3(u_1, u_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.1.3 Def.: Flächenkurve

Tafelskizze dazu

Seien $\Phi : \vec{x}(u, v)$, $(u, v) \in G$ eine C^r -Fläche in \mathbb{E}^3 und

$\bar{c} : \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$, $t \in I$, eine C^r -Kurve in G .

Dann heißt $c : \vec{x}(u(t), v(t))$, $t \in I$, eine C^r -Flächenkurve von Φ .

7.1.4 Parameterlinien

Tafelskizze von G

Flächenkurven der Gestalt

$\vec{x}(u, v_0)$, $u \in I$ heißen **u -Linien** oder **1-Linien**,

$\vec{x}(u_0, v)$, $v \in J$ heißen **v -Linien** oder **2-Linien**.

Zu jeder Parameterstelle (u_0, v_0) gibt es genau eine

u -Linie $\vec{x}(u, v_0)$, $u \in I$ und genau eine

v -Linie $\vec{x}(u_0, v)$, $v \in J$.

7.1.5 Tangentenvektoren

Tafelskizze

Ist $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$ eine C^1 -Fläche und

$c : \vec{x}(u(t), v(t)), t \in I$, eine C^1 -Flächenkurve von Φ , so sind:

$\vec{x}_1 := \vec{x}_u := \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}$ ein Tangentenvektor an eine u -Linie,

$\vec{x}_2 := \vec{x}_v := \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ ein Tangentenvektor an eine v -Linie,

und nach der Kettenregel

$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} = \vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v}$ ein Tangentenvektor an c .

7.1.6 Regularität

Tafelskizze mit Gegenbeispiel

Ist $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, eine C^1 -Fläche, so heißt $(u_0, v_0) \in G$ eine **reguläre Parameterstelle** von Φ , wenn gilt: $\{\vec{x}_u(u_0, v_0), \vec{x}_v(u_0, v_0)\}$ l.u.

Andernfalls heißt (u_0, v_0) **singulär**.

Tafelskizze mit Beispiel

Satz: Sei $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, eine C^1 -Fläche. Dann ist $(u_0, v_0) \in G$ eine reguläre Parameterstelle von Φ

$$\Leftrightarrow \vec{x}_u \times \vec{x}_v|_{(u_0, v_0)} \neq \vec{0}.$$

Sind alle $(u, v) \in G$ regulär, so heißt Φ eine **reguläre Fläche**.

Ist (u_0, v_0) eine reguläre Parameterstelle von Φ und gilt: $\vec{x}(u, v) = \vec{x}(u_0, v_0) \Rightarrow (u, v) = (u_0, v_0)$, so heißt $\vec{x}(u_0, v_0)$ auch ein **regulärer Punkt** von Φ .

Tafelskizze

Ist Φ eine reguläre Fläche, so sagt man:
Die Parameterlinien von Φ bilden ein **Gitter** oder ein **Netz** auf Φ .

Eine PD $\vec{x}(u, v)$, $(u, v) \in G$, einer Fläche Φ heißt **C^r -zulässig** oder eine **zulässige C^r -PD** von Φ , wenn gilt:

(1) \vec{x} ist C^r -PD von Φ mit $r \geq 1$.

(2) Jedes $(u, v) \in G$ ist eine reguläre Parameterstelle von Φ .

7.1.7 Einfachheit

Sei $\Phi : \vec{x}(u, v)$, $(u, v) \in G$, eine reguläre C^1 -Fläche. Ein Punkt $\vec{x}(u_0, v_0)$ heißt **einfacher Punkt** von Φ , wenn gilt: $\vec{x}(u, v) = \vec{x}(u_0, v_0) \Rightarrow (u, v) = (u_0, v_0)$.

Die Fläche Φ heißt **einfache Fläche**, wenn alle Punkte von Φ einfach sind.

7.1.8 Tangential-VR, Tangentialebene

Sei $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, eine C^1 -Fläche; sei $(u_0, v_0) \in G$ eine reguläre Stelle von Φ . Dann heißt der VR mit der Basis $\{x_u(u_0, v_0), x_v(u_0, v_0)\}$ der **Tangential-VR** (kurz: **TVR**) von Φ an der Stelle (u_0, v_0) . Die Ebene durch $\vec{x}(u_0, v_0)$, die parallel ist zu $x_u(u_0, v_0)$ und $x_v(u_0, v_0)$, heißt die **Tangentialebene** (kurz: **TE**) oder **Tangentenebene** von Φ an der Stelle (u_0, v_0) .

7.1.9 Flächenvektoren, Flächentangenten

Sei $\Phi : \vec{x}(u, v), (u, v) \in G$, eine C^1 -Fläche; sei $(u_0, v_0) \in G$ eine reguläre Stelle von Φ .

- a) Ist $\bar{c} : \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, t \in I$, eine C^1 -Kurve mit der regulären Stelle t_0 und $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$, und ist $c : \vec{x}(u(t), v(t)), t \in I$, die zugehörige Flächenkurve, so liegt der Tangentenvektor $\dot{\vec{x}} = \vec{x}_u \dot{u} + \vec{x}_v \dot{v}$ von c an der Stelle t_0 im TVR von Φ an der Stelle (u_0, v_0) .

b) Zu jedem Vektor $a\vec{x}_u(u_0, v_0) + b\vec{x}_v(u_0, v_0)$ im TVR von Φ an der Stelle (u_0, v_0) gibt es eine Flächenkurve c von Φ durch $\vec{x}(u_0, v_0)$, so dass gilt: Der Tangentialvektor von c an der Stelle $t = 0$ mit $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ ist der vorgegebene Vektor $a\vec{x}_u(u_0, v_0) + b\vec{x}_v(u_0, v_0)$.

Bew. von b): Wir setzen $c : \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 + ta \\ v_0 + tb \end{pmatrix}$. Dann ist $\dot{\vec{x}}(u(t), v(t)) = \vec{x}_u\dot{u} + \vec{x}_v\dot{v} = \vec{x}_ua + \vec{x}_vb$ längs c , und speziell für $t = 0$: $\dot{\vec{x}}(u(0), v(0)) = \vec{x}_u(u_0, v_0)a + \vec{x}_v(u_0, v_0)b$.

Bezeichnung: a, b heißen die **Flächenkoordinaten** des **Flächenvektors** $a\vec{x}_u + b\vec{x}_v$.