6.3 Ebene Kurven

6.3.1 Raumkurven in einer Ebene

Eine W-Punkt-freie C^3-Kurve $c : \vec{x}(t) \quad (t \in I)$ in $\mathbb{E}^3$ ist in einer Ebene enthalten $\Leftrightarrow \tau = 0 \ \forall t \in I$.

Beweis: ($\Rightarrow$) Ist c in einer Ebene enthalten, so sind $\dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}}$ und $\dddot{\vec{x}}$ parallel zu dieser Ebene, also linear abhängig.
Daher ist $\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}}, \dddot{\vec{x}}) = 0$
und damit $\tau = 0$.

($\Leftarrow$) c besitzt ein begleitendes Dreibein $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$
mit $\vec{b}\,' = -\tau\vec{n} = \vec{o}$,
also mit konstantem $\vec{b}$.
Die Schmiegebene $\sigma(s)$ hat die Ebenengleichung

$$\vec{b}(s) \cdot \vec{y} - \vec{b}(s) \cdot \vec{x}(s) = 0.$$

Dabei ist $\vec{y}$ der laufende Punkt der Ebene,
$\vec{b}(s)$ ein Normaleneinheitsvektor und
$\vec{b}(s) \cdot \vec{x}(s)$ ein vorzeichenbehafteter Abstand von $\sigma(s)$ vom Ursprung.

Da $\vec{b}(s)$ konstant ist, sind alle Schmiegebenen von c zueinander parallel.
Zudem gilt:

$$\frac{d}{ds}\vec{b}(s) \cdot \vec{x}(s) = \vec{o} \cdot \vec{x}(s) + \vec{b} \cdot \vec{t} = 0.$$

Der vorzeichenbehaftete Abstand aller Schmiegebenen von c vom Koordinatenursprung ist also auch konstant.
Daher ist $\sigma(s) =: \sigma$ konstant und c eine Kurve, die in einer Ebene liegt,
nämlich in der konstanten Schmiegebene σ.

6.3.2 Ebene Kurven

Betrachtet man eine Kurve in einer Ebene ohne umgebenden Raum, so kann man
- die Ebene orientieren durch Auszeichnung einer Rechts-Basis und
- die Kurve beschreiben durch eine PD mit zwei Koordinatenfunktionen.

Wir werden für ebene Kurven eine **vorzeichenbehaftete Krümmung** definieren.

6.3.3 Parameterdarstellung ebener Kurven

Sei $c : \vec{x}(t) \quad (t \in I)$ eine reguläre C^1-PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Ein Tangentenvektor von c an der Stelle t ist gegeben durch

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix},$$

der Tangenteneinheitsvektor von c an der Stelle t ist gegeben durch

$$\vec{t} := \frac{\dot{\vec{x}}(t)}{|\dot{\vec{x}}(t)|} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}},$$

der Hauptnormalenvektor von c an der Stelle t ist gegeben durch

$$\vec{n}(t) := \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}.$$

Die Vektoren $(\vec{t}, \vec{n})$ bilden eine Rechts-ONB, das **begleitende Zweibein** von c.

6.3.4 Die Frenetschen Ableitungsgleichungen für ebene Kurven

Sei $c : \vec{x}(s) \quad (s \in I)$ eine reguläre C^2-PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}.$$

Der Tangenteneinheitsvektor von c an der Stelle s ist gegeben durch

$$\vec{t}(s) = \vec{x}\,'(s) = \begin{pmatrix} x\,'(s) \\ y\,'(s) \end{pmatrix},$$

der Hauptnormalenvektor von c an der Stelle s ist gegeben durch

$$\vec{n}(s) := \begin{pmatrix} -y\,'(s) \\ x\,'(s) \end{pmatrix}.$$

Da $\vec{x}\,'^2 = 1$ auf I, ist $\vec{x}\,'\vec{x}\,'' = 0$ auf I, also

$$\vec{x}\,'' = \vec{t}\,' =: \kappa\vec{n}.$$

Dabei heißt $\kappa(s)$ die **Krümmung** von c an der Stelle s.

In Koordinaten:

$$x\,'' = -\kappa y\,', \quad y\,'' = \kappa x\,'.$$

Die Frenet-Gleichungen für ebene Kurven lauten damit

$$\vec{t}\,' = \kappa \vec{n}, \quad \vec{n}\,' = -\kappa \vec{t}.$$

6.3.5 Vorzeichen der Krümmung einer ebenen Kurve

Sei $c : \vec{x}(s) \quad (s \in I)$ eine reguläre C^2-PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\kappa = \kappa \, \mathrm{det}(\vec{t}, \vec{n}) = \mathrm{det}(\vec{x}\,', \vec{x}\,''),$$

also

$$\kappa(s) = \mathrm{det}(\vec{x}\,'(s), \vec{x}\,''(s)).$$

Die Krümmung $\kappa(s)$ einer regulären ebenen C^2-Kurve ist $\left\{ \begin{array}{c} > 0 \\ < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$ Die Vektoren $(\vec{x}\,', \vec{x}\,'')$ bilden eine $\left\{ \begin{array}{c} \text{Rechtsbasis} \\ \text{Linksbasis} \end{array} \right\} \Leftrightarrow$ Die Kurve c ist an der Stelle s $\left\{ \begin{array}{c} \text{linksgekrümmt} \\ \text{rechtsgekrümmt} \end{array} \right\}$.

6.3.6 Die Krümmung einer ebenen Kurve bei allgemeinem Parameter

Sei $c : \vec{x}(t) \quad (t \in I)$ eine reguläre C^2-PD einer ebenen Kurve. Dann ist

$$\kappa(t) = \frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3}.$$

Beweis:

$$\frac{\det(\dot{\vec{x}}, \ddot{\vec{x}})}{|\dot{\vec{x}}|^3} = \frac{\det(\vec{x}\,' \cdot \dot{s}, \vec{x}\,''\dot{s}^2 + \vec{x}\,'\ddot{s})}{\dot{s}^3} = \det(\vec{x}\,', \vec{x}\,'').$$

6.3.7 Der Hauptsatz der Kurventheorie für ebene Kurven

Seien I ein Intervall und $\kappa : \left\{ \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ s \mapsto \kappa(s) \end{array} \right\}$ stetig. Dann gibt es bis auf gleichsinnige Bewegungen genau eine Kurve in der Ebene mit der Krümmung $\kappa(s)$ an jeder Stelle $s \in I$.

Beweis: Sei $\alpha(s)$ der Winkel, den $\vec{x}\,'(s)$ mit der positiven x-Achse einschließt. Dann ist

$$\vec{x}\,'(s) = \begin{pmatrix} \cos\alpha(s) \\ \sin\alpha(s) \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{x}'' = \begin{pmatrix} -\sin\alpha(s) \\ \cos\alpha(s) \end{pmatrix} \cdot \alpha'(s).$$

Folglich ist

$$\alpha'(s) = \kappa(s),$$

also

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} \kappa(\sigma)\mathrm{d}\sigma.$$

Damit ist

$$\vec{x}(s) = \int_{s_0}^{s} \begin{pmatrix} \cos\int_{s_0}^{\sigma}\kappa(\tau)\mathrm{d}\tau \\ \sin\int_{s_0}^{\sigma}\kappa(\tau)\mathrm{d}\tau \end{pmatrix} \mathrm{d}\sigma + \vec{x}_0$$

mit einer Integrationskonstanten $\vec{x}_0$.

Achtung: Die Bezeichnungen σ und τ haben nichts zu tun mit Schmiegebene oder Torsion.
Zu integrieren ist über s, aber s ist die obere Grenze des Integrals.
Daher die Bezeichnung der Integrationsvariablen mit dem entsprechenden griechischen Buchstaben σ.
Der nächste Buchstabe im griechischen Alphabet ist τ.

Aus einer vorgegebenen stetigen Krümmung lässt sich eine ebene Kurve bis auf ihre Lage eindeutig explizit berechnen (bis auf sogenannte Quadraturen = Integrationen).