TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, MARTIN VON GAGERN

Geometriekalküle WS 2010/11

Lösungen zu Aufgabenblatt 7 (26. Januar 2011)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 36. Geraden in $\mathbb{RP}^3$.

Die Plücker-Koordinaten einer Gerade durch zwei Punkte a und b im $\mathbb{RP}^3$ mit homogenen Koordinaten $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ und $(b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ sind der sechsdimensionale Vektor:

$$\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} \vee \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix} = \begin{array}{c}12\\[1.2em]13\\[1.2em]14\\[1.2em]23\\[1.2em]24\\[1.2em]34\end{array}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_4 & b_4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_2 & b_2\\a_4 & b_4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_3 & b_3\\a_4 & b_4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Koordinaten der Gerade bis auf skalares Vielfaches unabhängig von der Wahl der Punkte auf der Geraden sind.

b) Was geschieht, wenn die beiden Punkte zusammenfallen?

<u>LÖSUNG:</u>

a) Zwei Punkte auf der Geraden durch a und b seien c und d, gegeben durch $c = \lambda_c a + \mu_c b$ und $d = \lambda_d a + \mu_d b$. Da Determinanten linear in jeder Spalte sind, kann man alle Unterdeterminanten von $c \vee d$ schreiben als:

$$\begin{vmatrix}c_i & d_i\\c_j & d_j\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\lambda_c a_i + \mu_c b_i & \lambda_d a_i + \mu_d b_i\\ \lambda_c a_j + \mu_c b_j & \lambda_d a_j + \mu_d b_j\end{vmatrix} = (\lambda_c \mu_d - \lambda_d \mu_c)\begin{vmatrix}a_i & b_i\\a_j & b_j\end{vmatrix}$$

Diese Unterdeterminanten unterscheiden sich also nur durch einen Faktor, der für alle i, j der gleiche ist und daher als skalarer Vorfaktor die Äquivalenzklasse des Koordinatenvektors nicht beeinflusst. Der Vorfaktor wird jedoch Null, wenn die Punkte c und d zusammenfallen.

b) Wenn die beiden Punkte zusammenfallen, geben die Plücker-Koordinaten alle Null.

Aufgabe 37. Operationen in $\mathbb{RP}^3$.

Die Operationen Join ($\vee$) und Meet ($\wedge$) auf Plücker-Koordinaten haben folgende allgemeine Form:

$$C = A \vee B \qquad\qquad D = A \wedge B$$

$$C_\lambda = \sum_{\substack{(\tau,\mu)\\ \tau\dot\cup\mu=\lambda}} \operatorname{sign}(\tau\mu)\cdot A_\tau \cdot B_\mu \qquad\qquad D_\lambda = \sum_{\substack{(\tau,\mu)\\ \tau\cap\mu=\lambda}} \operatorname{sign}((\tau\setminus\lambda)(\mu\setminus\lambda))\cdot A_\tau \cdot B_\mu$$

Dabei bezeichnen λ, τ, μ (geordnete) Teilmengen der Indexmenge für homogene Punktkoordinaten, also für den $\mathbb{RP}^3$ der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$.

a) Gegeben seien die beiden Punkte $p = (1, -1, 0)^T$ und $q = (0, 2, 1)^T$ als Elemente aus $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die homogenen Koordinaten dieser Punkte in $\mathbb{RP}^3$.

b) Berechnen Sie die Plücker-Koordinaten der Verbindungsgerade g durch die beiden Punkte p und q.

c) Überprüfen Sie die Richtigkeit der Plücker-Koordinaten der Geraden g mithilfe der Grassmann-Plücker-Relationen (Rang 2).

d) Wiederum in $\mathbb{R}^3$ seien die folgenden Punkte gegeben: $a = (1, 0, 0)^T$, $b = (0, 2, 0)^T$ und $c = (0, 3, 5)^T$. Bestimmen Sie die homogenen Koordinaten der Ebene E, die von diesen drei Punkten aufgespannt wird.

e) Stellen Sie fest, ob der Punkt $d = (1, 5, 1)^T$ in der Ebene E liegt.

f) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E und geben Sie diesen als Element von $\mathbb{R}^3$ an.

<u>Lösung:</u>

a) Homogenisieren (in Standardeinbettung) funktioniert wie gewohnt durch Hinzunahme einer 1 als letzter Koordinate.

$$p = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad q = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Die Plücker-Koordinaten der Geraden g ergeben sich als Join von p und q:

$$g = p \vee q = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 23 \\ 24 \\ 34 \end{array}\begin{pmatrix} 1\cdot 2 - (-1)\cdot 0 \\ 1\cdot 1 - 0\cdot 0 \\ 1\cdot 1 - 1\cdot 0 \\ (-1)\cdot 1 - 0\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 - 1\cdot 2 \\ 0\cdot 1 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 23 \\ 24 \\ 34 \end{array}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Die Grassmann-Plücker-Relation mit 2×2-Determinanten hat drei Summanden und die Gestalt

$$[ab][cd] - [ac][bd] + [ad][bc] = 0$$

oder hier konkreter (durch Identifizieren der Komponenten 1 bis 4 des Punktepaares mit den vektoren a bis d der Relation)

$$g_{12}g_{34} - g_{13}g_{24} + g_{14}g_{23} = 0$$

Durch Einsetzen der berechneten Koordinaten erhält man

$$2\cdot(-1) - 1\cdot(-3) + 1\cdot(-1) = -2 + 3 - 1 = 0$$

Damit ist die Relation erfüllt, und der Vektor stellt gültige Plücker-Koordinaten dar.

d) Man kann die Koordinaten der Ebene auf zwei unterschiedliche Weisen berechnen.

Wiederholter Join: Man kann zwei Punkte zu einer Geraden vebinden und anschließend die gesuchte Ebene als Join dieser Gerade mit dem dritten Punkt erhalten.

$$a \vee b = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 23 \\ 24 \\ 34 \end{array} \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 23 \\ 24 \\ 34 \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E = (a \vee b) \vee c = \begin{array}{c} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 23 \\ 24 \\ 34 \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 123 \\ 124 \\ 134 \\ 234 \end{array} \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \\ 2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 - (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 123 \\ 124 \\ 134 \\ 234 \end{array} \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Unterdeterminanten: Die Plücker-Koordinaten einer Gerade entsprechen genau den 3×3 Unterdeterminanten der aus den homogenen Koordinaten der aufspannenden Punkte gebildeten Matrix.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad E = \begin{array}{c} 123 \\ \\ 124 \\ \\ 134 \\ \\ 234 \end{array} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 123 \\ 124 \\ 134 \\ 234 \end{array} \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

e) Auch für den Inzidenztest gibt es verschiedene Möglichkeiten.

Join: Der Join eines Objektes (z.B. Gerade, Ebene) mit einem Punkt liefert genau dann einen Nullvektor, wenn der Punkt mit dem Objekt inzident ist.

$$E \vee d = \begin{array}{c} 123 \\ 124 \\ 134 \\ 234 \end{array} \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \vee \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = {}_{1234} \left(10 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 + (-5) \cdot 5 - 10 \cdot 1 \right) = -24 \neq 0$$

Das von Null verschiedene Ergebnis bedeutet, dass der Join den gesamten $\mathbb{RP}^3$ ergibt, und daher der Punkt d außerhalb der Ebene liegt.

Meet: Man kann statt des Joins genausogut auch den Meet ausrechnen, wenn das Ergebnis lediglich eine einzige Komponente hat.

$$E \wedge d = \begin{array}{c} {\scriptstyle 123} \\ {\scriptstyle 124} \\ {\scriptstyle 134} \\ {\scriptstyle 234} \end{array} \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \wedge \begin{array}{c} {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 2} \\ {\scriptstyle 3} \\ {\scriptstyle 4} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = {\scriptstyle \emptyset} \Big(10 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 + (-5) \cdot 5 - 10 \cdot 1 \Big) = -24 \neq 0$$

Determinante: Vier Punkte im $\mathbb{RP}^3$ liegen genau dann in einer Ebene, wenn ihre Determinante verschwindet. Die Determinante kann man beispielsweise nach der ersten Spalte einfach entwickeln.

$$[a, b, c, d] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (10 + 3 - 25 - 2) - 10 = -24 \neq 0$$

Die Determinante ist von Null verschieden, also sind die Punkte nicht koplanar.

Normalenform: Wie in der Vorlesung angegeben, kann man für eine Ebene in $\mathbb{RP}^3$ einen Normalenvektor angeben. Die dazu verwendeten Unterdeterminanten kommen in den Plücker-Koordinaten der Ebene bereits vor, allerdings in anderer Reihenfolge. Mit

$$h = (E_{234}, -E_{134}, E_{124}, -E_{123})^T = (10, 5, -1, -10)^T$$

erhält man einen Normalenvektor, so dass das Skalarprodukt mit einem Punkt genau dann Null wird, wenn der Punkt in der Ebene liegt. Wir können die Ebene E auch schreiben als

$$E = \left\{ p \in \mathbb{RP}^3 \,\middle|\, \langle p, h \rangle = 0 \right\} = \left\{ (x, y, z, w)^T \in \mathbb{RP}^3 \,\middle|\, 10x + 5y - 1z - 10w = 0 \right\}$$

Einsetzen des Punktes $d = (1, 5, 1, 1)^T$ ergibt

$$10 \cdot 1 + 5 \cdot 5 - 1 \cdot 1 - 10 \cdot 1 = 24 \neq 0$$

Der Vektor d steht also in $\mathbb{R}^4$ nicht senkrecht auf h, und der Punkt d liegt daher nicht in der Ebene E.

f) Falls man bisher die Ebene über ihren Normalenvektor beschrieben hat, im Unterschied zu dieser Musterlösung, sollte man jetzt auf Plücker-Koordinaten im Sinne der Vorlesung umsteigen. Dazu sind Vorzeichen anzupassen und passende Indexmengen zu notieren:

$$h = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \\ -10 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad E = \begin{array}{c} {\scriptstyle 234} \\ {\scriptstyle 134} \\ {\scriptstyle 124} \\ {\scriptstyle 123} \end{array} \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Die Reihenfolge der Indexmengen im Vektor ist für die weitere Berechnung unerheblich.

Der Schnittpunkt wird über die Meet-Operation berechnet.

$$E \wedge g = \begin{array}{c} {\scriptstyle 123} \\ {\scriptstyle 124} \\ {\scriptstyle 134} \\ {\scriptstyle 234} \end{array} \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \wedge \begin{array}{c} {\scriptstyle 12} \\ {\scriptstyle 13} \\ {\scriptstyle 14} \\ {\scriptstyle 23} \\ {\scriptstyle 24} \\ {\scriptstyle 34} \end{array} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 2} \\ {\scriptstyle 3} \\ {\scriptstyle 4} \end{array} \begin{pmatrix} E_{123} \cdot g_{14} - E_{124} \cdot g_{13} + E_{134} \cdot g_{12} \\ E_{123} \cdot g_{24} - E_{124} \cdot g_{23} + E_{234} \cdot g_{12} \\ E_{123} \cdot g_{34} - E_{134} \cdot g_{23} + E_{234} \cdot g_{13} \\ E_{124} \cdot g_{34} - E_{134} \cdot g_{24} + E_{234} \cdot g_{14} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 2} \\ {\scriptstyle 3} \\ {\scriptstyle 4} \end{array} \begin{pmatrix} 10 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 + (-5) \cdot 2 \\ 10 \cdot (-3) - (-1) \cdot (-1) + 10 \cdot 2 \\ 10 \cdot (-1) - (-5) \cdot (-1) + 10 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-1) - (-5) \cdot (-3) + 10 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle 2} \\ {\scriptstyle 3} \\ {\scriptstyle 4} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ -11 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Dehomogenisieren liefert das Ergebnis in der gewünschten Form:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{11}{4} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ 2{,}75 \\ 1{,}25 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

— ***Hausaufgaben*** —

Aufgabe 38. Querbezüge.

Beschreiben Sie den Zusammenhang und die Unterschiede zwischen folgenden Aufgaben:

a) Blatt 1 Aufgabe 2 und Aufgabe 5.

b) Blatt 1 Aufgabe 6 und Blatt 4 Aufgabe 25.

c) Blatt 3 Aufgabe 15 und Aufgabe 16 c).

d) Blatt 5 Aufgabe 26 a), Blatt 5 Aufgabe 28 d) und Blatt 6 Aufgabe 32 a).

e) Blatt 1 Aufgabe 5 a) p_2, Blatt 2 Aufgabe 7 c) und Blatt 5 Aufgabe 30 a) A_2. Wie sieht ein Billardtisch für $\mathbb{CP}^1$ aus?

<u>Lösung:</u>

a) Beide Aufgaben behandeln das Einzeichnen homogener Koordinaten in eine Zeichenebene. Sie unterscheiden sich lediglich durch die Einbettung der Zeichenebene.

b) Beide Male ist die Unterteilung eines projektiv verzerrten Quadrates in kongruente Teile gefragt. Während die wiederholte Zweiteilung in Aufgabe 6 noch recht offensichtlich rein inzidenzgeometrisch zu lösen ist, ist die entsprechend inzidenzgeometrische Lösung von Aufgabe 25 deutlich schwerer zu finden, und daher nur eine von vielen naheliegenden Lösungen.

c) Es gilt

$$M = M_2 \cdot M_1^{-1} = M_2 \cdot \frac{1}{\det(M_1)} \operatorname{adj}(M_1) \sim M_2 \cdot \operatorname{adj}(M_1)$$

Statt Gauss-Elimination durchzuführen, um die Inverse auszurechnen, kann man also die adjunkte Matrix verwenden, und dabei sogar auf die Division durch die Determinante verzichten, da skalare Vielfache ja keine Rolle spielen.

d) $Q \cdot p$ ist nach 26 die Tangente an den Kreis im Punkt p. Dies gilt insbesondere für $p = \mathtt{I}$ oder $p = \mathtt{J}$. Dementsprechend sind $Q \cdot \mathtt{I}$ und $Q \cdot \mathtt{J}$ zwei Tangenten und $M = (Q \cdot \mathtt{I}) \times (Q \cdot \mathtt{J})$ aus Aufgabe 28 ist ihr Schnittpunkt. Dieser Zusammenhang wird in Aufgbe 32 sichtbar, wenn $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ an reelle Positionen verschoben sind.

e) In $\mathbb{RP}^2$ gibt es eine ganze Ferngerade, so dass die einzelnen Fernpunkte immer noch Richtungsinformation tragen. Die Topologie dieser Ebene wird in Aufgabe 7 veranschaulicht. In $\mathbb{CP}^1$ gibt es hingegen nur einen einzigen Fernpunkt. Die zugehörige Topologie ist die einer Kugel.

Will man eine topologische Kugel durch verkleben der Kanten eines Polygons beschreiben, so müssen auf dem Rand des Polygons zwei Punkte ausgezeichnet werden als die Endpunkte des Schnitts, an dem die Kugel aufgeschnitten worden ist. Zwischen diesen Endpunkten verlaufen zwei Randsegmente, die miteinander identifiziert werden, um den Schnitt zuzukleben. Bei einem rechteckigen Billardtisch ist das schwierig: wählt man Ecken als die Endpunkte des Schnitts, und will man nur ganze Kanten miteinander verkleben, so müsste man lange mit kurzen Kanten verkleben. Verschiedene Auswege aus diesem Dilemma sind denkbar:

- Die einfachste Lösung ist vermutlich, die Form des Billard-Tisches zu einem Quadrat abzuändern.
- Man könnte die Mitten von Kanten als Endpunkte des Schnitts wählen. Dann wären die beiden Seiten des Schnitts symmetrisch und würden gut zusammen passen. In dieser Lösung müsste man Teleporter einbauen, die die eine Hälfte einer Kante mit der anderen identifizieren.

- Auch wenn man den Schnitt in der Ecke enden lässt, könnte man mit Hilfe von Kantenunterteilungen eine geeignete Verklebung bekommen. Die lange Seite des Billardtisches ist gerade doppelt so lang wie die kurze. Teilt man die lange Seite in zwei gleich große Teile, und verwendet gegenüberliegenede Ecken als Endpunkte des Schnitts, so hat jede Seite des Schnitts drei gleich lange Stücke, die sich gut verkleben lassen.
- In der Topologie sind Längen meist unerheblich. Von daher spricht topologisch auch nichts dagegen, kurze Seiten mit langen zu verkleben. Wie in dieser Welt eine konstante Form und Größe der Billardkugeln sicherzustellen ist, sei dem Teleporter-Hobbybastler als Knobelaufgabe überlassen.

Aufgabe 39. Klausurvorbereitung.

Bereiten Sie sich auf die Klausur vor:

a) Lesen Sie sich Ihre Vorlesungsmitschrift und (soweit vorhanden) das zugehörige Buch (noch einmal) durch.

b) Sehen Sie sich alle Aufgaben der Übungsblätter noch einmal an, und bearbeiten Sie diejenigen, deren Lösung ihnen eventuell Probleme bereiten könnte.

c) Lesen Sie die Musterlösungen zu den Übungsaufgaben, und vergleichen Sie die dort angegebenen Lösungen mit ihren eigenen.

d) Erstellen Sie Ihren „Spickzettel“ für die Klausur.

LÖSUNG:

Die Lösung dieser Aufgabe gestaltet sich von Person zu Person sehr unterschiedlich. Viel Erfolg!