TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Geometriekalküle WS 2010/11
Lösungen zu Aufgabenblatt 6 (12. Januar 2011)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 31. Euklidischer Abstand.

Üblicherweise bestimmt man die Entfernung $\|x-y\|$ zweier Punkte $x=(x_1,x_2)^T, y=(y_1,y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ über den Satz von Pythagoras. Es gilt nämlich

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

Im Folgenden soll eine projektive Invariante hergeleitet werden, die den euklidischen Abstand bezüglich der Standardeinbettung in $\mathbb{RP}^2$ wiedergibt. Lösen Sie dafür die folgenden Teilaufgaben:

a) Zeigen Sie, dass $\|x-y\| = \sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}$ ist, wenn $X=(x_1,x_2,1)^T$ und $Y=(y_1,y_2,1)^T$.

b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}$ keine projektive Invariante ist.

c) Begründen Sie, dass

$$d := \frac{\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}\;[A,\mathtt{I},\mathtt{J}][B,\mathtt{I},\mathtt{J}]}{\sqrt{[A,B,\mathtt{I}][A,B,\mathtt{J}]}\;[X,\mathtt{I},\mathtt{J}][Y,\mathtt{I},\mathtt{J}]}$$

eine projektive Invariante ist.

d) Interpretieren Sie diesen Term d als Verhältnis von Abständen in $\mathbb{R}^2$.

e) Was muss für A, B gelten, damit d den Abstand $\|x-y\|$ wiedergibt?

<u>Lösung:</u>

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}]\cdot[X,Y,\mathtt{J}]} &= \sqrt{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & -i \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & i \\ x_2 & y_2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \\
&= \sqrt{((y_1-x_1)+i(y_2-x_2))\cdot((y_1-x_1)-i(y_2-x_2))} \\
&= \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2} \\
&= \|y-x\| = \|x-y\|
\end{aligned}$$

b) Der ist Ausdruck ist z.B. nicht unabhängig von der speziellen Wahl der Repräsentanten, denn es gilt

$$\sqrt{[\lambda\cdot X,Y,\mathtt{I}]\cdot[\lambda\cdot X,Y,\mathtt{J}]} = \lambda\cdot\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}]\cdot[X,Y,\mathtt{J}]} \neq \sqrt{[X,Y,\mathtt{I}]\cdot[X,Y,\mathtt{J}]}$$

für $\lambda \notin \{0,1\}$.

Genauso ist der Ausdruck nicht invariant unter einer projektiven Transformation, dargestellt durch die Matrix M:

$$\sqrt{[MX,MY,M\mathtt{I}]\cdot[MX,MY,M\mathtt{J}]} = \det(M)\cdot\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}]\cdot[X,Y,\mathtt{J}]} \neq \sqrt{[X,Y,\mathtt{I}]\cdot[X,Y,\mathtt{J}]}$$

für $\det(M) \notin \{0,1\}$. Zur Frage, ob nicht der Betrag der Determinante notiert werden sollte, finden sich bei der nächsten Teilaufgabe noch Details.

c) Der Ausdruck d ist unabhängig von der Wahl der speziellen Repräsentanten, denn für $\lambda_A, \lambda_B, \lambda_X, \lambda_Y, \lambda_{\mathtt{I}}, \lambda_{\mathtt{J}} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{[\lambda_X X, \lambda_Y Y, \lambda_{\mathtt{I}}\mathtt{I}][\lambda_X X, \lambda_Y Y, \lambda_{\mathtt{J}}\mathtt{J}]}\,[\lambda_A A, \lambda_{\mathtt{I}}\mathtt{I}, \lambda_{\mathtt{J}}\mathtt{J}][\lambda_B B, \lambda_{\mathtt{I}}\mathtt{I}, \lambda_{\mathtt{J}}\mathtt{J}]}{\sqrt{[\lambda_A A, \lambda_B B, \lambda_{\mathtt{I}}\mathtt{I}][\lambda_A A, \lambda_B B, \lambda_{\mathtt{J}}\mathtt{J}]}\,[\lambda_X X, \lambda_{\mathtt{I}}\mathtt{I}, \lambda_{\mathtt{J}}\mathtt{J}][\lambda_Y Y, \lambda_{\mathtt{I}}\mathtt{I}, \lambda_{\mathtt{J}}\mathtt{J}]}\\ =&\frac{\lambda_A\lambda_B\lambda_X\lambda_Y(\lambda_{\mathtt{I}}\lambda_{\mathtt{J}})^{5/2}}{\lambda_A\lambda_B\lambda_X\lambda_Y(\lambda_{\mathtt{I}}\lambda_{\mathtt{J}})^{5/2}}\cdot\frac{\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}\,[A,\mathtt{I},\mathtt{J}][B,\mathtt{I},\mathtt{J}]}{\sqrt{[A,B,\mathtt{I}][A,B,\mathtt{J}]}\,[X,\mathtt{I},\mathtt{J}][Y,\mathtt{I},\mathtt{J}]} = d\end{aligned}$$

Ferner sei eine projektive Transformation durch die Matrix M beschrieben. Dann gilt $\det(M) \neq 0$ und

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{[MX, MY, M\mathtt{I}][MX, MY, M\mathtt{J}]}\,[MA, M\mathtt{I}, M\mathtt{J}][MB, M\mathtt{I}, M\mathtt{J}]}{\sqrt{[MA, MB, M\mathtt{I}][MA, MB, M\mathtt{J}]}\,[MX, M\mathtt{I}, M\mathtt{J}][MY, M\mathtt{I}, M\mathtt{J}]}\\ =&\frac{\det(M)^3}{\det(M)^3}\cdot\frac{\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}\,[A,\mathtt{I},\mathtt{J}][B,\mathtt{I},\mathtt{J}]}{\sqrt{[A,B,\mathtt{I}][A,B,\mathtt{J}]}\,[X,\mathtt{I},\mathtt{J}][Y,\mathtt{I},\mathtt{J}]} = d\end{aligned}$$

Man beachte, dass hier in beiden Fällen quadratische Faktoren aus der Wurzel gezogen wurden, ohne dabei das Vorzeichen zu beachten. Dazu gibt es zwei mögliche Interpretationen.

In $\mathbb{RP}^2$, erweitert um zwei zusätzliche spezielle Punkte $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$, erwarten wir positive relle Zahlen als Abstände. Daher sollte der gesamte Ausdruck in Betragsstriche gesetzt werden, und wir können Vorzeichen in einzelnen Komponenten ignorieren. Der Ausdruck $M\mathtt{I}$ ist für eine nicht euklidische Transformation in dieser Welt jedoch nicht nur eine Transformation innerhalb der Welt, sondern eine Transformation der Welt an sich, da $M\mathtt{I}$ von $\mathtt{I}$ verschieden ist. Details dazu in Aufgabe 35.

In $\mathbb{CP}^2$, wo $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ sich natürlich als zwei ganz gewöhnliche projektive Punkte einbetten, muss auch die Wurzel komplexwertig betrachtet werden. Spätestens dann wird es unvermeidbar, die Wurzel als eine mehrwertige Funktion aufzufassen, die ihr Ergebnis nur bis auf ein Vorzeichen bestimmt. Im Sinne dieser Unbestimmtheit ist es wiederum zulässig, einen quadratischen Faktor aus der Wurzel zu ziehen und dabei das Quadrat wegzulassen. An dem unbestimmten Vorzeichen des Ausdrucks ändert diese Operation nichts.

d) Betrachten wir $[X, \mathtt{I}, \mathtt{J}]$ in Standardeinbettung:

$$[X, \mathtt{I}, \mathtt{J}] = \begin{vmatrix} x_1 & -i & i \\ x_2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2i$$

Das Ergebnis hängt nicht von den Koordinaten x_1, x_2 ab, und gilt daher auch für die anderen drei Punkte Y, A, B. In Standardeinbettung gilt also

$$[A, \mathtt{I}, \mathtt{J}] = [B, \mathtt{I}, \mathtt{J}] = [X, \mathtt{I}, \mathtt{J}] = [Y, \mathtt{I}, \mathtt{J}] = -2i$$

Da sich diese Determinanten alle kürzen, kann man d als Verhältnis zweier Längen auffassen:

$$d = \frac{\overbrace{\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}}^{\|x-y\|}\;\overbrace{[A,\mathtt{I},\mathtt{J}]}^{-2i}\overbrace{[B,\mathtt{I},\mathtt{J}]}^{-2i}}{\underbrace{\sqrt{[A,B,\mathtt{I}][A,B,\mathtt{J}]}}_{\|a-b\|}\;\underbrace{[X,\mathtt{I},\mathtt{J}]}_{-2i}\underbrace{[Y,\mathtt{I},\mathtt{J}]}_{-2i}} = \frac{\|x-y\|}{\|a-b\|}$$

wobei $a = (a_1, a_2)^T, b = (b_1, b_2)^T \in \mathbb{R}^2$ zwei Punkte in der euklidischen Ebene und $A = (a_1, a_2, 1)^T, B = (b_1, b_2, 1)^T \in \mathbb{RP}^2$ ihre Standardeinbettungen in der projektiven Ebene sind.

In Teilaufgabe c) haben wir gezeigt, dass der Ausdruck d von der Wahl der Repräsentanten unabhängig ist. Wenn andere Repräsentanten gewählt werden, gelten für die einzelnen Teile des Ausdrucks zwar nicht mehr notwendigerweise die gleichen Zahlenwerte (etwa die $-2i$), aber der gesamte Ausdruck behält seinen Wert und somit seine Bedeutung als Verhältnis der euklidischen Abstände bei.

e) A und B muss so gewählt sein, dass $\|a - b\| = 1$ gilt.

Aufgabe 32. Verallgemeinerter Kreismittelpunkt.

Es gibt projektive Transformationen in $\mathbb{C}^{3\times3}$, die einen gegebenen Kreis so abbilden, dass die Punkte `I` und `J` reell und somit sichtbar werden. Zur Einfachheit sei hier eine Situation dargestellt, in der das Bild des Kreises wieder ein Kreis ist.

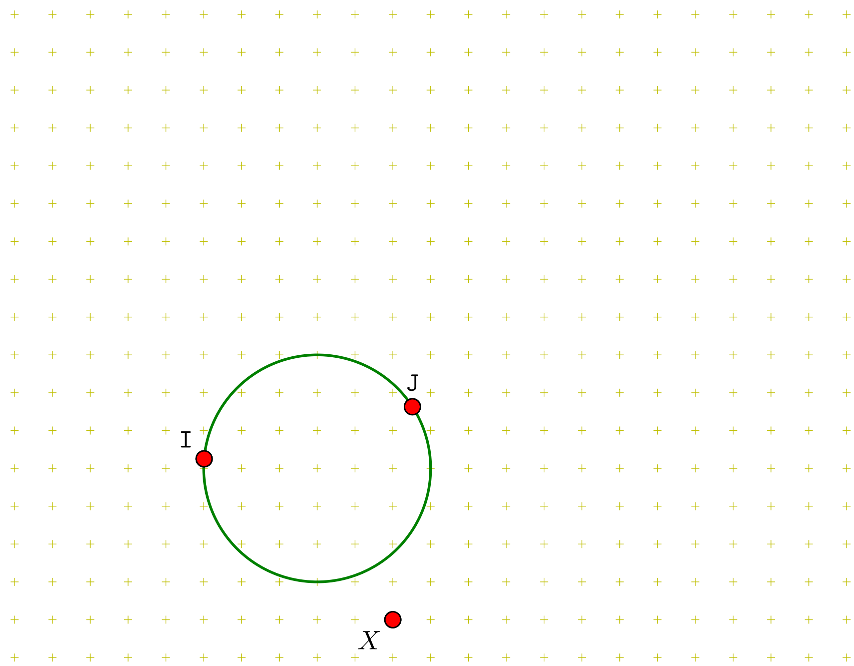
Führen Sie die folgenden Konstruktionsschritte mit möglichst projektiven Mitteln in der transformierten Konfiguration aus. Die Beschreibungen sind dabei für die ursprüngliche Konfiguration und mit euklidischem Vokabular angegeben *(kursiv)* und müssen entsprechend übertragen werden.

a) Konstruieren Sie den *Mittelpunkt* M des Kreises.

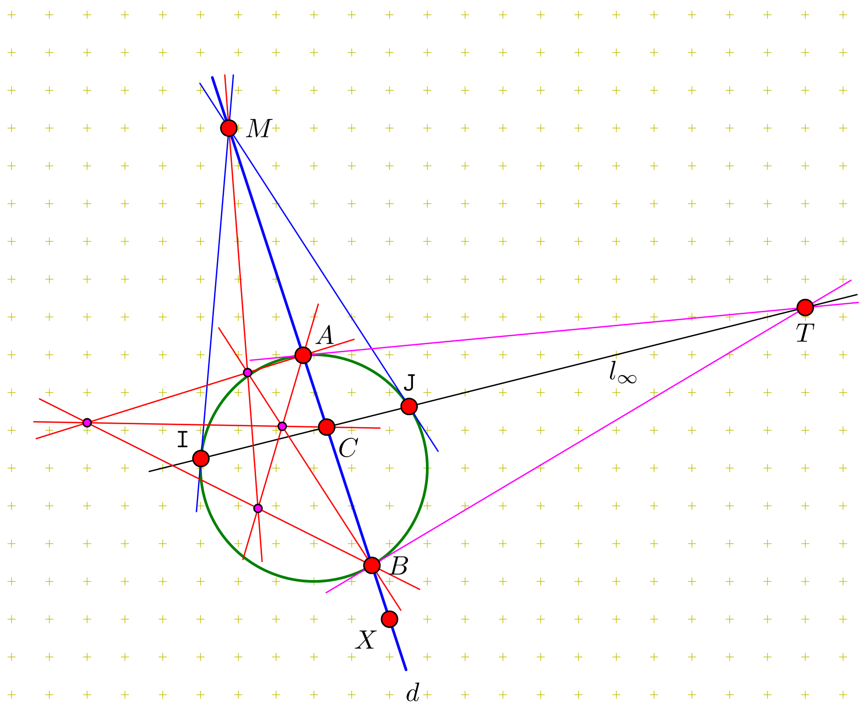
b) Zeichnen Sie die Gerade d ein, die durch den *Kreismittelpunkt* M sowie durch den vorgegebenen Punkt X verläuft. Bezeichnen Sie die Schnittpunkte dieses *Durchmessers* mit dem Kreis als A und B.

c) Überprüfen Sie durch eine geeignete Hilfskonstruktion, dass M von A und B *gleich weit entfernt* ist.

d) Überprüfen Sie durch Einzeichnen der passenden Inzidenz, dass die zwei Tangenten an den Kreis in den Punkten A und B *parallel* sind.



<u>Lösung:</u>



a) Der Mittelpunkt ergibt sich als Schnittpunkt der Tangenten an den Kreis in den Punkten `I` und `J`. Tangenten an Kreise kann man mit dem Geodreieck zeichnen, indem man die Senkrechte auf den Radius im gewünschten Berührpunkt einzeichnet.

b) Die euklidischen Bezeichnungen *Kreismittelpunkt* und *Durchmesser* haben keinen Einfluss auf die Tatsache, dass hier einfach die Verbindungsgerade $M \vee X$ gezeichnet werden muss.

c) M ist von A und B gleich weit entfernt, wenn diese drei Punkte mit dem Fernpunkt von d in harmonischer Lage sind, also $(A, B; M, C) = -1$ ist. Die Ferngerade ist die Verbindungsgerade von $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$, so dass auch dieser Fernpunkt sichtbar wird. Die harmonische Lage kann durch die gewohnte Hilfskonstruktion überprüft werden, wie in der zeichnung links von d in Rot angegeben.

d) Die beiden Tangenten sind parallel, wenn ihr Schnittpunkt auf der Ferngeraden liegt. Die Konkurrenz der drei Geraden in T zeigt also diese Eigenschaft.

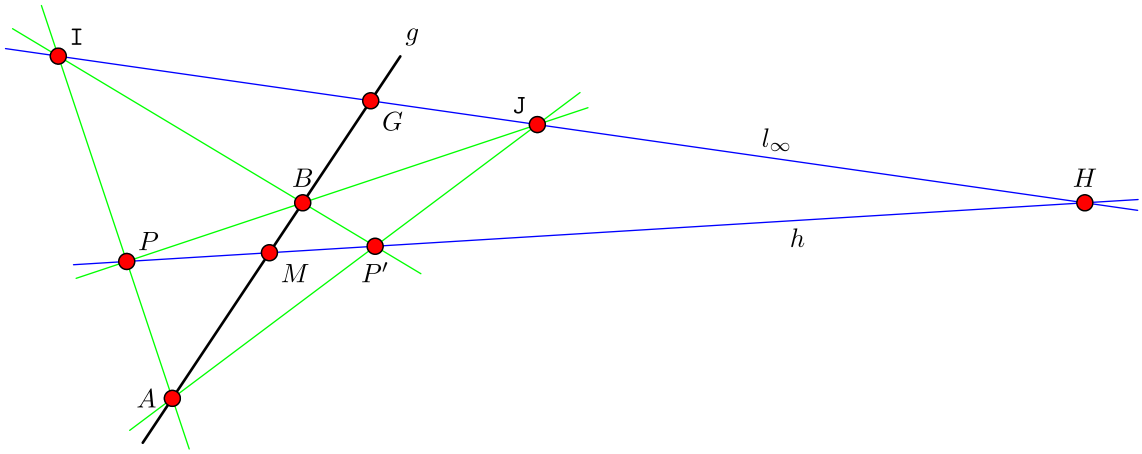
— ***Hausaufgaben*** —

Aufgabe 33. Abstand Punkt – Gerade.

Gegeben seien die homogenen Koordinaten eines Punktes P und einer Gerade g. Geben Sie eine Vorschrift zur projektiven Berechnung des Abstands von P zu g an. Zerlegen Sie die Vektoren dazu nicht in ihre einzelnen Koordinaten, sondern verwenden Sie statt dessen die folgenden zusätzlichen Vektoren:

$$\mathtt{I} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathtt{J} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die nachfolgende Skizze kann Ihnen behilflich sein. Sie stellt die Konstruktion des Spiegelpunktes P' von P and g dar und sollte aus der Vorlesung bekannt sein.



Lösung:

Die ursprüngliche Angabe hatte einen Fehler: die dritte Komponente der Vektoren O und E war jeweils mit 0 statt 1 angegeben gewesen. Die Abstandsmessung benötigt jedoch zwei vorgegebene Punkte im Abstand 1.

Man konstruiert den Spiegelpunkt P', verbindet diesen mit dem ursprünglichen Punkt P, und schneidet diese Gerade mit g, um die orthogonale Projektion M von P auf g zu erhalten.

$$
\begin{aligned}
A &= (P \times \mathtt{I}) \times g \\
B &= (P \times \mathtt{J}) \times g \\
P' &= (A \times \mathtt{J}) \times (B \times \mathtt{I}) \\
h &= P \times P' \\
M &= h \times g
\end{aligned}
$$

Oder als ein einziger Ausdruck:

$$M = \left(P \times \left(\Big(((P \times \mathtt{I}) \times g) \times \mathtt{J} \Big) \times \Big(((P \times \mathtt{J}) \times g) \times \mathtt{I} \Big) \right) \right) \times g$$

Der Abstand zwischen M und P kann anschließend wie in der vorangegangenen Aufgabe berechnet werden.

$$\operatorname{dist}(p, g) = \frac{\sqrt{[P, M, \mathtt{I}][P, M, \mathtt{J}]}\ [O, \mathtt{I}, \mathtt{J}][E, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}{\sqrt{[O, E, \mathtt{I}][O, E, \mathtt{J}]}\ [P, \mathtt{I}, \mathtt{J}][M, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}$$

Theoretisch könnte man auch in diese Formel den oben angegebenen Ausdruck für M einsetzen, um so einen einzigen Ausdruck für die gesamte Berechnung zu erhalten. Das ergebnis wäre jedoch sehr unübersichtlich.

Alternativ zur Berechnung des Abstands zwischen P und M könnte man auch den Abstand zwischen P und P' berechnen und halbieren.

Aufgabe 34. Laguerres Formel.

Zeigen Sie mit Hilfe von Laguerres Formel folgende Aussagen:

a) Für die Winkelsumme im Dreieck gilt:
$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \pmod{\pi}$$

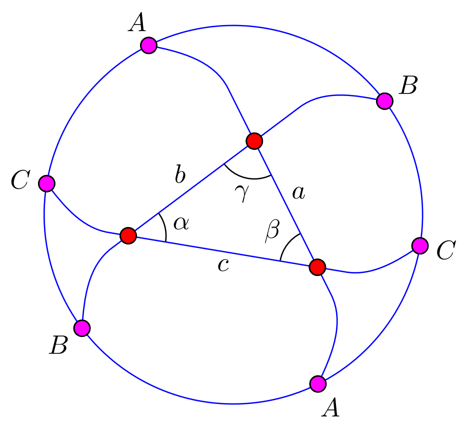
b) Gegenüberliegende Winkel eines Parallelogramms sind (modulo π) gleich groß.

c) Begründen Sie, warum sich mit Laguerres Formel Winkel nur Modulo π bestimmen lassen.

Lösung:

a) Es sei a, b und c die den Winkeln α, β und γ gegenüberliegenden Seiten. Die Schnittpunkte dieser Seiten mit der Ferngerade seien als A, B und C bezeichnet. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \frac{1}{2i} \cdot \log(B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi} \\
\beta &= \frac{1}{2i} \cdot \log(C, A; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi} \\
\gamma &= \frac{1}{2i} \cdot \log(A, B; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}
\end{aligned}
$$

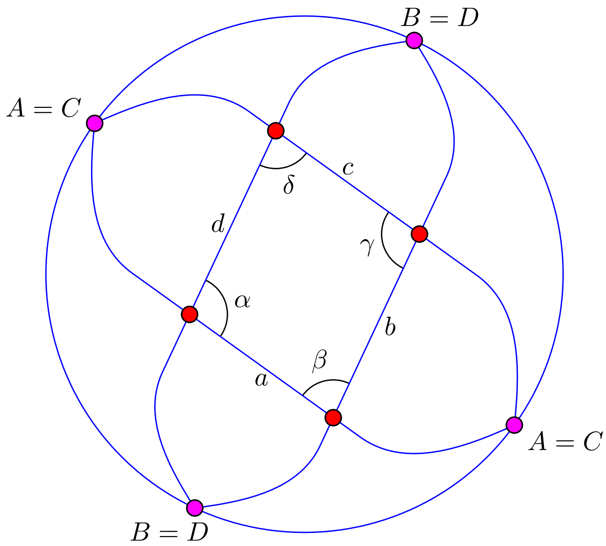


Damit folgt nun

$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma &= \frac{1}{2i} \Big(\log(B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) + \log(C, A; \mathtt{I}, \mathtt{J}) + \log(A, B; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \Big) \\
&= \frac{1}{2i} \log \Big((B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \cdot (C, A; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \cdot (A, B; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \Big) \\
&= \frac{1}{2i} \log(1) = 0 \pmod{\pi}
\end{aligned}
$$

b) Verwendet man Bezeichnungen analog zur Situation im Dreieck, so ergibt sich nachfolgendes Bild. Die Winkel errechnen sich darin als

$$\alpha = \frac{1}{2i}\log(D, A; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$
$$\beta = \frac{1}{2i}\log(A, B; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$
$$\gamma = \frac{1}{2i}\log(B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$
$$\delta = \frac{1}{2i}\log(C, D; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$



Da die gegenüberliegenden Seiten jedoch parallel sind, fallen ihre Fernpunkte zusammen: $A = C$ und $B = D$. Damit sind auch die Winkel offensichtlich gleich, da genau das gleiche Doppelverhältnis ausgerechnet wird:

$$\alpha = \gamma = \frac{1}{2i}\log(D = B, A = C; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$
$$\beta = \delta = \frac{1}{2i}\log(A = C, B = D; \mathtt{I}, \mathtt{J}) \pmod{\pi}$$

Nebenbemerkung: Die beiden verbleibenden Doppelverhältnisse unterscheiden sich nur noch in der Reihenfolge der beiden Fernpunkte. Das entspricht einem Kehrwert des Doppelverhältnisses und somit einem Vorzeichenwechsel des Logarithmus. Modulo π ist also $\alpha = -\beta$ und so fort, was der Tatsache Ausdruck verleiht, dass sich benachbarte Winkel im Parallelogramm zu π addieren.

c) Der komplexe Logarithmus ist mehrdeutig. Da $e^{x+k2\pi i}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ den gleichen Wert annimmt, kann der Logarithmus den Imaginärteil eines Exponenten nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π bestimmen. Nach Division durch $2i$ ergibt sich, dass der Realteil des Winkels nur bis auf ganzzahlige Vielfache von π bestimmt werden kann.

Da projektive Geraden unorientiert sind, also keine ausgezeichnete Richtung haben, kann der Winkel zwischen zwei Geraden gar nicht genauer bestimmt werden. Winkelmessungen modulo 2π funktionieren nur zwischen Geraden mit vorgegebener Richtung. Klassische Winkelmessung zwischen vorgegebenen Schenkeln entspricht Halbgeraden mit vorgegebener Ausdehnungsrichtung ab dem gemeinsamen Startpunkt.

Aufgabe 35. Projektive Invarianz.

Vier Punkte A, B, C, D liegen genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn

$$[CA\mathtt{I}][DB\mathtt{I}][DA\mathtt{J}][CB\mathtt{J}] - [CA\mathtt{J}][DB\mathtt{J}][DA\mathtt{I}][CB\mathtt{I}] = 0$$

Außerdem kann der Abstand zwischen zwei Punkten X, Y bestimmt werden mit Hilfe der Formel

$$d = \frac{\sqrt{[X, Y, \mathtt{I}][X, Y, \mathtt{J}]}\,[A, \mathtt{I}, \mathtt{J}][B, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}{\sqrt{[A, B, \mathtt{I}][A, B, \mathtt{J}]}\,[X, \mathtt{I}, \mathtt{J}][Y, \mathtt{I}, \mathtt{J}]}$$

Die beiden oben angegebenen Formeln sind projektiv invariant. Auf der anderen Seite ist von perspektivischen Abbildungen hinreichend bekannt, dass diese projektive Abbildungen sind, aber Längen verzerren und Kreise zu Ellipsen verbiegen können. Wie passt das zusammen?

<u>Lösung:</u>

Die Ausdrücke sind projektiv invariant, wenn die Projektion auf alle vorkommenden Elemente gleichermaßen angewandt wird, also einschließlich $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ sowie der für die Längenmessung verwendeten Referenzpunkte A und B. Bildet man nur einen Teil der Punkte projektiv ab, so ist der Ausdruck im Allgemeinen nicht invariant, sondern verändert seinen Wert.

Die euklidische Bedeutung hängt jedoch davon ab, dass $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ auf ihren vorgegebenen Positionen liegen, und der Abstand zwischen A und B genau 1 beträgt. Eine andere Wahl dieser Punkte entspricht einer projektiv verzerrten euklidischen Ebene, in der zwar projektiv die gleichen Eigenschaften gelten, aber euklidische Messungen sich nicht mehr direkt durchführen lassen.