TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

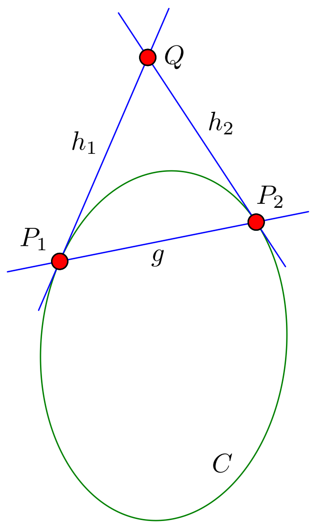
Geometriekalküle WS 2010/11
Lösungen zu Aufgabenblatt 5 (15. Dezember 2010)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 26. Kegelschnitte und Tangenten.

Gegeben sei ein nicht degenerierter Kegelschnitt C, der durch eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschrieben wird:

$$C = \left\{ p \in \mathbb{RP}^2 \,\middle|\, p^T \cdot A \cdot p = 0 \right\}$$



a) Zeigen Sie, dass $h = A \cdot p$ die Tangente an einen Punkt p auf C ist.

b) Finden Sie zu einer Tangente h an C, deren homogene Koordinaten gegeben seien, den Berührpunkt p.

c) Betrachten Sie nebenstehende Konstruktion. Gegeben sei ein Kegelschnitt C und eine Gerade g, die C in zwei Punkten P_1 und P_2 schneidet. Es seien h_1 und h_2 die jeweiligen Tangenten an C in P_1 und P_2. Sie schneiden sich in einem Punkt Q. Geben Sie eine geschlossene Form an, um Q in Abhängigkeit von g zu berechnen.

d) Für die Umkehrung der Konstruktion in Aufgabenteil c) (C und Q gegeben, Tangenten h_1 und h_2 konstruieren, g ist die Verbindungsgerade von P_1 und P_2, den Berührpunkten der Tangenten), was ist g in Abhängigkeit von Q?

Lösung:

a) Wir zeigen die Behauptung für nicht degenerierte Kegelschnitte in zwei Schritten. Zuerst zeigen wir, dass p auf h liegt und in einem zweiten Schritt zeigen wir noch, dass p der einzige Punkt ist, der sowohl auf h als auch auf C liegt.

p liegt auf h: Da p auf C liegt, gilt $0 = p^T \cdot A \cdot p = \langle p, Ap\rangle = \langle p, h\rangle$. Daher liegt p auch auf h.

p ist einziger gemeinsamer Punkt: Angenommen es gäbe einen weiteren Punkt q, der von p verschieden ist, d.h. $q \neq \alpha p$, und der gleichzeitig auf C und h liegt, d.h. $q^T A q = 0$ und $\langle q, h\rangle = q^T A p = 0$.
Aus $p^T A p = 0$ und $q^T A p = 0$ folgt

$$(\lambda p + \mu q) A p = 0 \qquad \text{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Aus $q^T A q = 0$ und $q^T A p = 0$ folgt

$$q^T A(\lambda p + \mu q) = (\lambda p + \mu q)^T A q = 0 \qquad \text{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

wobei wir ausnutzen, dass $A^T = A$ ist. Diese beiden Folgerungen ergeben zusammen

$$(\lambda p + \mu q)^T A(\lambda p + \mu q) = 0 \qquad \text{für alle } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

was bedeutet, dass der Kegelschnitt C die Gerade $p \vee q = h$ enthält und daher degeneriert ist.

b) Unter Benutzung von $h = Ap$ aus Teilaufgabe a) folgern wir für den Berührpunkt p einer Tangenten h an den Kegelschnitt C:

$$p = A^{-1}h$$

Die Matrix A ist invertierbar, da der Kegelschnitt nicht degeneriert ist. Bis auf eine projektive Transformation ist ein nicht degenerierter Kegelschnitt äquivalent zum Einheitskreis, dessen Matrix offensichtlich invertierbar ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Der Punkt Q liegt auf den beiden Tangenten h_1 und h_2. Nach Aufgabenteil a) gilt $h_1 = AP_1$ und damit

$$0 = \langle Q, h_1 \rangle = \langle Q, AP_1 \rangle = Q^T AP_1 = Q^T A^T P_1 = (AQ)^T P_1 = \langle AQ, P_1 \rangle$$

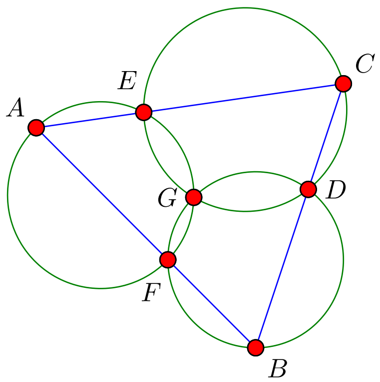
Analog gilt $0 = \langle Q, h_2 \rangle = \langle AQ, P_2 \rangle$. Also ist AQ eine Gerade, die durch die beiden Punkte P_1 und P_2 geht. Das ist aber gerade die Gerade g. Daher ist $AQ = g$ und somit

$$Q = A^{-1}g$$

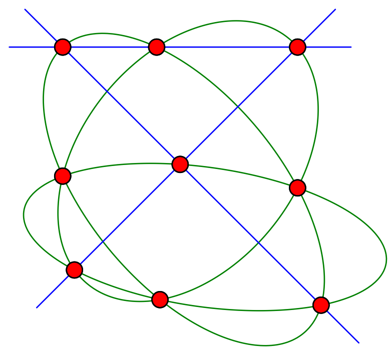
d) Wie in Aufgabenteil c) bereits argumentiert ist

$$g = AQ$$

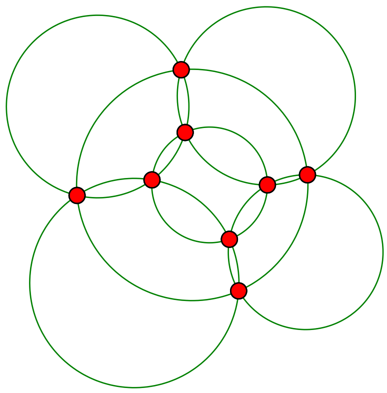
Aufgabe 27. Metamorphosen eines Satzes.



Ausgangssatz



Verallgemeinerung a)



Verallgemeinerung b)

a) Oben auf der linken Seite ist die Zeichnung eines geometrischen Satzes gegeben: Wenn alle eingezeichneten Inzidenzen bis auf eine erfüllt sind, so ist auch diese letzte Inzidenz erfüllt. Wenn Sie diesen Satz so interpretieren, dass die drei Kreise zu Kegelschnitten werden, könnten Sie die mittlere Zeichnung erhalten. Ordnen Sie in dieser Zeichnung den eingezeichneten Punkten sinnvoll die Bezeichnungen der ursprünglichen Zeichnung zu. Geben Sie ebenso den noch verbleibenden Punkten eine geometrisch sinnvolle Interpretation.

b) Betrachten Sie noch einmal die Zeichnung des geometrischen Satzes ganz links. Wenn Sie diesen Satz diesmal so interpretieren, dass die drei Geraden zu Kreisen werden, könnten Sie die rechte Zeichnung erhalten. Ordnen Sie in dieser Zeichnung den eingezeichneten Punkten sinnvoll die Bezeichnungen der ursprünglichen Zeichnung zu. Geben Sie ebenso dem letzten noch verbleibenden Punkt eine geometrisch sinnvolle Interpretation.

c) Verwenden Sie die nebenstehenden neuen Bezeichnungen für die Punkte in der Konstruktion aus Aufgabe b), und beweisen Sie diesen Satz, den sogenannten Satz von Miguel:

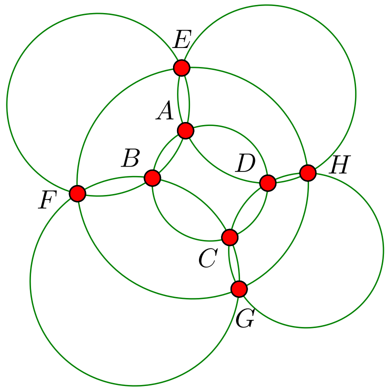
Gegeben seien acht paarweise verschiedene Punkte A bis H. Sind die fünf Punkte-Quadrupel

$$(A, B, C, D) \quad (A, B, E, F) \quad (B, C, F, G) \quad (C, D, G, H) \quad (A, D, E, H)$$

jeweils kozirkular oder kollinear, so ist es auch das Quadrupel

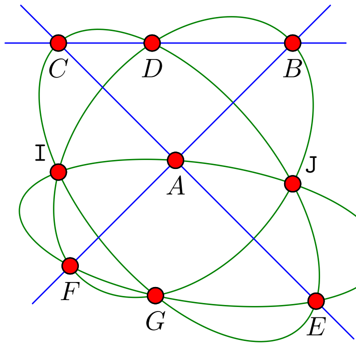
$$(E, F, G, H)$$

Nutzen Sie aus, dass das Doppelverhältnis von vier Punkten in $\mathbb{CP}^1$ genau dann reell ist, wenn die Punkte kollinear oder kozirkular sind.

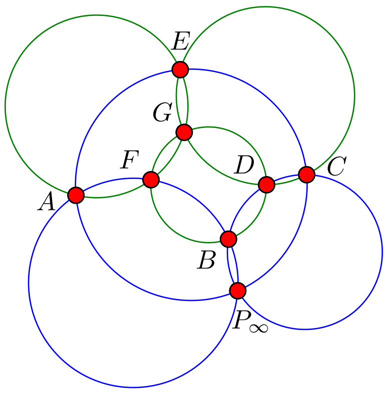


LÖSUNG:

a) Man interpretiert die Kreise der ursprünglichen Konstruktion als spezielle Kegelschnitte (in $\mathbb{RP}^2$ oder $\mathbb{CP}^2$). Die neuen Geraden entsprechen damit den alten Geraden, die Kegelschnitte den Kreisen. Analog entsprechen die Schnittpunkte von zwei Geraden und einem Kegelschnitt den Ecken des Dreiecks, die Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten und einer Geraden den Schnittpunkten von zwei Kreisen mit einer Kante des Dreiecks. Von den drei Schnittpunkten von drei Kegelschnitten entspricht einer (ein beliebiger) dem Schnittpunkt G der drei Kreise. Die anderen beiden entsprechen den Punkten `I` und `J`, durch die alle Kreise verlaufen.



b) Man interpretiert die Geraden der ursprünglichen Konstruktion als Kreise mit unendlich großem Radius (am besten in $\mathbb{CP}^1$). Dann kann man in der Verallgemeinerung drei der Kreise mit den ursprünglichen Geraden identifizieren. Diese sind in der Skizze blau eingezeichnet. Die Schnittpunkte von zwei blauen und einem grünen Kreis entsprechen den ursprünglichen Ecken. Die Schnittpunkte von zwei grünen und einem blauen Kreis den Schnittpunkten von zwei Kreisen und einer Dreieckskante. Der Schnittpunkt der drei grünen Kreise entspricht dem Schnittpunkt G der drei ursprünglichen Kreise. Der verbleibende Punkt ist der Schnittpunkt der drei blauen Kreise. Diesen kann man als Entsprechung des unendlich fernen Punktes P_∞ in $\mathbb{CP}^1$ auffassen.



c) Zuerst eine kleine Vorüberlegung: Wenn ein Doppelverhältnis $(a, b; c, d)$ von vier paarweise verschiedenen Punkten reell ist, so folgt, dass jede Permutation der Punkte ebenso ein reelles Doppelverhältnis liefert.

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die vier Punkte genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden liegen, wenn eines der möglichen Doppelverhältnisse reell ist. Mit der Vorüberlegung folgt, dass die Reihenfolge der Punkte im Doppelverhältnis dabei keine Rolle spielt.

Die fünf Voraussetzungen des Satzes liefern fünf Quadrupel von Punkten, deren Doppelverhältnisse jeweils reell sind. Ihr Produkt ist es daher ebenfalls. Man kann durch Multiplikation geeigneter Doppelverhältnisse die gewünschte Aussage über (E, F, G, H) erhalten, bei der sich alle anderen Determinanten kürzen. Allerdings funktioniert das nicht für jede beliebige Reihenfolge.

Am einfachsten geht man von dem gewünschten Ergebnis aus, also der Kollinearität von $\{E, F, G, H\}$. Die Determinanten $[E, G]$ und $[F, H]$ können in diesem Ergebnis nicht vorkommen, da die entsprechenden Punktepaare in keinem der anderen Punktequadrupel gemeinsam vorkommen. Auch für die anderen Kreise gibt es Paare, die keinen weiteren Kreis mehr gemeinsam haben. Das sind immer die Paare aus „gegenüberliegenden" Punkten, etwa $[A, C]$. Diese Punktepaare müssen im Doppelverhältnis auf der gleichen Seite stehen, damit ihre Determinanten nicht in der Rechnung auftauchen, da sie sich sonst nicht kürzen würden. Damit stehen die Paare der Doppelverhältnisse fest:

$$\{\{A,C\},\{B,D\}\} \qquad \{\{A,F\},\{B,E\}\} \qquad \{\{B,G\},\{C,F\}\} \qquad \{\{C,H\},\{D,G\}\} \qquad \{\{A,H\},\{D,E\}\}$$
$$\{\{E,G\},\{F,H\}\}$$

Am einfachsten geht man jetzt von einem gewünschten Ziel aus, etwa

$$(E,G;F,H) = \frac{[E,F][G,H]}{[E,H][G,F]}$$

Dann multipliziert man geeignete Doppelverhältnisse, um dieses Ziel zu erhalten, also gewünschte Terme zu bekommen und störende Terme zu kürzen. Beginnen wir mit dem ersten Faktor im Zähler: Ein Doppelverhältnis, das zu obigen Paaren passt und das $[E,F]$ im Zähler enthält, wäre $(E,B;F,A)$. Dadurch entsteht auch ein störender Term $[B,A]$ im Zähler, der sich mit $(B,D;C,A)$ kürzen lässt. Setzt man dies fort, kommt man am Ende zur gewünschten Gleichung:

$$\begin{aligned}(E,G;F,H) = \frac{[E,F][G,H]}{[E,H][G,F]} &= \frac{[E,F][B,A]}{[E,A][B,F]} \cdot \frac{[B,C][D,A]}{[B,A][D,C]} \cdot \frac{[B,F][G,C]}{[B,C][G,F]} \cdot \frac{[D,H][E,A]}{[D,A][E,H]} \cdot \frac{[G,H][D,C]}{[G,C][D,H]} \\ &= (E,B;F,A) \cdot (B,D;C,A) \cdot (B,G;F,C) \cdot (D,E;H,A) \cdot (G,D;H,C) \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Damit ist die gewünschte Kozirkularität oder Kollinearität bewiesen.

— *Hausaufgaben* —

Aufgabe 28. Kreis als Kegelschnitt, der `I` und `J` enthält.

Ein Kreis in der projektiven Ebene ist durch

$$C = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{RP}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 + \alpha xz + \beta yz + \gamma z^2 = 0;\ \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

gegeben.

a) Warum (oder wann) ist dies ein Kreis? Wie lautet sein Mittelpunkt?

b) Zeigen Sie, dass die Kreise mit obiger Kreisgleichung die Punkte $\mathtt{I} = (-i,1,0)^T$ und $\mathtt{J} = (i,1,0)^T$ enthalten.

c) Geben Sie die Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die diesen Kreis beschreibt.

d) Zeigen Sie, dass man den Mittelpunkt des Kreises wie folgt ausrechnen kann:

$$M = (Q \cdot \mathtt{I}) \times (Q \cdot \mathtt{J})$$

e) Gibt es Quadriken, die `I` und `J` enthalten, aber nicht durch eine Gleichung in der oben angegebenen Form beschrieben werden können?

LÖSUNG:

a) Die allgemeine Kreisgleichung eines Kreises in $\mathbb{R}^2$ lautet:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - r^2 = 0$$

mit $x_M, y_M, r \in \mathbb{R}$. An dieser Gleichung lassen sich sofort der Mittelpunkt $M = (x_M, y_M)$ und der Radius r ablesen.

Die Gleichung für C lässt sich (durch quadratische Ergänzung) umschreiben:

$$\begin{aligned} C(x,y,z) &= x^2 + y^2 + \alpha xz + \beta yz + \gamma z^2 \\ &= \left(x^2 + 2x\left(\frac{\alpha}{2}z\right) + \left(\frac{\alpha}{2}z\right)^2\right) - \left(\frac{\alpha}{2}z\right)^2 + \left(y^2 + 2y\left(\frac{\beta}{2}z\right) + \left(\frac{\beta}{2}z\right)^2\right) - \left(\frac{\beta}{2}z\right)^2 + \gamma z^2 \\ &= \left(x - \left(-\frac{\alpha}{2}\right)z\right)^2 + \left(y - \left(-\frac{\beta}{2}\right)z\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma\right)z^2 \end{aligned}$$

Wird diese Gleichnug dehomogenisiert ($z = 1$ einsetzen), so ist sofort ersichtlich, dass C in $\mathbb{R}^2$ den Kreis um den Mittelpunkt $M = (-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})^T$ mit Radius $r = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} - \gamma}$ beschreibt.

Für $\gamma > \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}$ wird der Radius imaginär, und zumindest in $\mathbb{R}^2$ kann man dann nicht mehr von einem „normalen“ Kreis reden.

b) Einfaches Einsetzen von `I` und `J` zeigt die Aussage:

$$\begin{aligned} (-i)^2 + 1^2 + \alpha \cdot (-i) \cdot 0 + \beta \cdot 1 \cdot 0 + \gamma \cdot 0^2 &= -1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ (+i)^2 + 1^2 + \alpha \cdot (+i) \cdot 0 + \beta \cdot 1 \cdot 0 + \gamma \cdot 0^2 &= -1 + 1 + 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

c) Gesucht ist eine symmetrische Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$(x,y,z) \cdot Q \cdot (x,y,z)^T = x^2 + y^2 + \alpha xz + \beta yz + \gamma z^2$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man das Ergebnis. Wenn man will, kann man dabei die Koordinaten des Mittelpunkts aus Teilaufgabe a) verwenden, in Vorarbeit auf Teilaufgabe d).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\alpha}{2} \\ 0 & 1 & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\alpha}{2} & \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_M \\ 0 & 1 & -y_M \\ -x_M & -y_M & \gamma \end{pmatrix}$$

d) Es gilt

$$\begin{aligned} (Q \cdot \mathtt{I}) \times (Q \cdot \mathtt{J}) &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_M \\ 0 & 1 & -y_M \\ -x_M & -y_M & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \times \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_M \\ 0 & 1 & -y_M \\ -x_M & -y_M & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ ix_M - y_M \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -ix_M - y_M \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2i \cdot x_M \\ -2i \cdot y_M \\ -2i \end{pmatrix} = -2i \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man kann mit Blick auf Aufgabe 26 die Vektoren $Q \cdot \mathtt{I}$ und $Q \cdot \mathtt{J}$ als homogene Koordinaten der Tangenten an den Kreis in den Punkten `I` und `J` auffassen. Deren Schnittpunkt ist folglich der Mittelpunkt.

e) Ein allgemeiner Kegelschnitt in der projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ wird durch

$$C = \left\{(x,y,z)^T \in \mathbb{RP}^2 \,\middle|\, ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + exz + fyz = 0\right\}$$

beschrieben.

Wenn die Punkte `I` und `J` auf einem Kegelschnitt liegen, so ergibt sich durch Einsetzen von `I` und `J` in die Kegelschnittgleichung, dass $-a+b-di=0$ und $-a+b+di=0$ gelten muss, woraus folgt, dass

$$d = 0 \text{ und } a = b$$

erfüllt sein muss.

Für $a \neq 0$ reduziert sich die Kegelschnittgleichung dann zu

$$x^2 + y^2 + \frac{e}{a}xz + \frac{f}{a}yz + \frac{c}{a}z^2 = 0 \quad ,$$

was – wie oben gezeigt – gerade einer Kreisgleichung entspricht (mit $\alpha = \frac{e}{a}$, $\beta = \frac{f}{a}$, $\gamma = \frac{c}{a}$).

Für $a = b = 0$ ergibt sich die Gleichung

$$cz^2 + exz + fyz = (ex + fy + cz) \cdot z = (ex + fy + cz) \cdot (0x + 0y + 1z) = 0$$

Diese Gleichung ist das Produkt aus zwei Geraden: der Geraden mit homogenen Koordinaten $(e, f, c)^T$ und der Ferngeraden. Der Kegelschnitt ist also degeneriert und zerfällt in zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Geraden.

Aufgabe 29. von $\mathbb{CP}^1$ nach $\mathbb{RP}^2$.

Gegeben seien die homogenen Koordinaten eines endlichen Punktes in $\mathbb{CP}^1$:

$$\begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

a) Geben Sie die homogenen Koordinaten des entsprechenden Punktes in $\mathbb{RP}^2$ an. Verwenden Sie dazu nur Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen, ausgehend von den vier oben angegebenen reellen Zahlen.

b) Was ist das Ergebnis dieser Abbildung, wenn die Eingabe den unendlich fernen Punkt in $\mathbb{CP}^1$ beschreibt?

<u>Lösung:</u>

a) Für einen endlichen Punkt ergeben sich die Koordinaten in $\mathbb{R}^2$ als Realteil und Imaginärteil des dehomogenisierten komplexen Punktes. Um diese sinnvoll auftrennen zu können, muss man den Nenner reell machen.

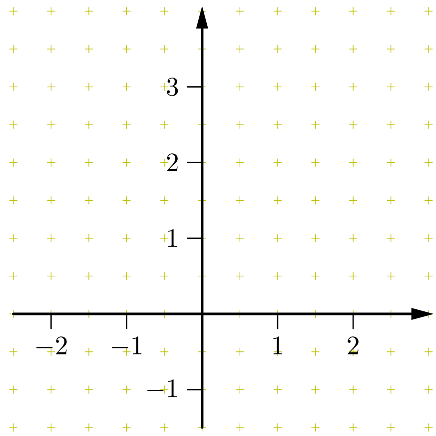
$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$$

Da die geforderte Form ohne Division auskommen soll, muss der gemeinsame Nenner in die dritte Komponente des reellen homogenen Vektors geschrieben werden. Damit ist jede Komponente eine Summe oder Differenz aus zwei Produkten von Zahlen der Eingabe.

$$\begin{pmatrix} ac+bd \\ bc-ad \\ cc+dd \end{pmatrix}$$

b) Der unendlich ferne Punkt in $\mathbb{CP}^1$ ist durch eine verschwindende letzte Komponente gekennzeichnet, also $c = d = 0$. Unter diesen Umständen ergibt obige Formel den Nullvektor. Das ist nur konsequent, da der unendlich ferne Punkt in $\mathbb{CP}^1$ keine Richtungsinformation trägt. Ihn mit einem bestimmten Fernpunkt in $\mathbb{RP}^2$ zu identifizieren, wäre daher falsch. Der Nullvektor als „nicht-Punkt“ ist uns schon öfter als Ergebnis für nicht eindeutig definierte Operationen begegnet, etwa als Verbindungsgerade zweier identischer Punkte.

Aufgabe 30. Geometrische Objekte in $\mathbb{CP}^1$.



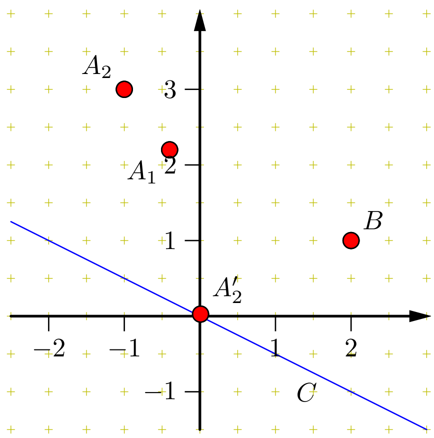
Zeichnen Sie die folgenden geometrischen Objekte in ein Koordinatensystem:

a) Die Punkte $A_1 = \begin{pmatrix} 4+3i \\ 1-2i \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3+i \\ e^{\frac{3}{2}\pi i} \end{pmatrix}$ und $A_3 = \begin{pmatrix} 2+4i \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Die Menge $B = \left\{ p \in \mathbb{CP}^1 \;\middle|\; \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4+2i \end{pmatrix}, p \right\rangle = 0 \right\}$

c) Die Menge $C = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{CP}^1 \;\middle|\; \frac{2-i}{z} \in \mathbb{R} \right\}$

<u>Lösung:</u>



a) Die ursprüngliche Angabe hatte einen Fehler: im Exponenten von A_2 hat die imaginäre Einheit i gefehlt. Der dieser Angabe entsprechende Punkt ist im Folgenden als A_2' bezeichnet.

$$A_1 \mathrel{\hat{=}} \frac{4+3i}{1-2i} = \frac{(4+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{(4-6)+(3+8)i}{1^2+2^2} = \frac{-2}{5} + \frac{11}{5}i \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 2{,}2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 \mathrel{\hat{=}} \frac{3+i}{e^{\frac{3}{2}\pi i}} = \frac{3+i}{-i} = \frac{(3+i)\cdot i}{(-i)\cdot i} = \frac{3i-1}{1} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2' \mathrel{\hat{=}} \frac{3+i}{e^{\frac{3}{2}\pi}} = e^{-\frac{3}{2}\pi}(3+i) \mathrel{\hat{=}} e^{-\frac{3}{2}\pi} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}009 \\ 0{,}027 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = (2+4i) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A_3 ist der unendlich ferne Punkt in $\mathbb{CP}^1$, und kann daher nicht richtig eingezeichnet werden.

b)

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4+2i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle &= 0 \\ -2x + (4+2i)y &= 0 \\ (4+2i)y &= 2x \\ B \mathrel{\hat{=}} \frac{x}{y} = \frac{4+2i}{2} &= 2+i \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt in dieser Form beschreibt in $\mathbb{CP}^1$ also nur einen einzelnen Punkt, keine Gerade wie in $\mathbb{RP}^2$.

c) Ein Bruch zweier komplexer Zahlen ist reell, wenn die Zahlen in die gleiche oder in entgegengesetzte Richtungen in der komplexen Ebene zeigen:

$$\frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_1 = \theta_2 \pmod{\pi}$$

Daher ist C die Ursprungsgerade in Richtung $(2 - i)$.