TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

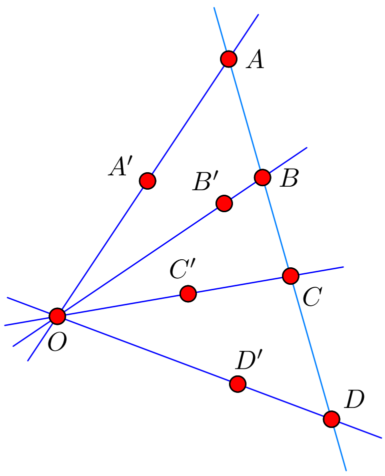
Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Geometriekalküle WS 2010/11

Lösungen zu Aufgabenblatt 4 (1. Dezember 2010)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 19. Punkte von O aus gesehen.



Gegeben seien vier paarweise verschiedene Geraden a, b, c, d in $\mathbb{RP}^2$. Alle vier Geraden schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt O.

a) Es seien A, B, C, D vier kollineare und von O verschiedene Punkte auf a, b, c, d. Beweisen Sie:

$$(A, B; C, D) = \frac{[O, A, C][O, B, D]}{[O, A, D][O, B, C]}$$

b) Es seien A', B', C', D' vier von O verschiedene Punkte auf a, b, c, d. Beweisen Sie:

$$(a, b; c, d) = \frac{[O, A', C'][O, B', D']}{[O, A', D'][O, B', C']}$$

Lösung:

a) Es gibt unterschiedliche Ansätze, wie diese Aufgabe gelöst werden kann. Im Folgenden sollen zwei davon vorgestellt werden.

Spezielle Koordinaten: Es seien $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^2$ kollinear. Der Ausdruck

$$\frac{[O, A, C] \cdot [O, B, D]}{[O, A, D] \cdot [O, B, C]}$$

bleibt offensichtlich invariant unter projektiven Transformationen und hängt auch nicht von der speziellen Wahl der Repräsentanten der Punkte O, A, B, C, D ab. Im Allgemeinen ist eine projektive Transformation durch vier Punkte und deren Bilder eindeutig definiert. Da von diesen vier Punkten jedoch keine drei kollinear sein dürfen, können in der vorliegenden Konstruktion nur drei (nicht kollineare) Punkte der Konfiguration durch eine projektive Transformation auf beliebige (nicht kollineare) Positionen abgebildet werden. Dadurch wird bereits die Gerade, auf der A, B, C, D liegen, eindeutig definiert. Theoretisch könnte man einen der verbleibenden Punkte auf dieser Gerade frei wählen, aber diese Freiheit ist hier unnötig.

Da eine geeignete Transformation existiert, können wir also o.B.d.A. $A = (1, 0, 0)^T$, $B = (0, 1, 0)^T$ und $O = (0, 0, 1)^T$ setzen. Bei dieser Wahl gilt, dass C und D ebenfalls Fernpunkte sind, und damit die Gestalt $C = (c_1, c_2, 0)^T$ und $D = (d_1, d_2, 0)^T$ haben. Einsetzen der Repräsentanten ergibt nun

$$\frac{[O, A, C] \cdot [O, B, D]}{[O, A, D] \cdot [O, B, C]} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & d_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}$$

Entwickelt man jede der vier Determinanten nach der ersten Spalte, ergibt sich

$$\frac{\begin{vmatrix}1 & c_1\\0 & c_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & d_1\\1 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & d_1\\0 & d_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & c_1\\1 & c_2\end{vmatrix}}$$

Die Spalten der Determinanten sind jetzt gerade die 2-dimensionalen homogenen Koordinaten der Punkte A, B, C, D auf der zugehörigen Geraden bezüglich der Basis (A, B). Das sieht man beispielsweise für den Punkt C daran, dass $C = c_1A + c_2B$ für die dreielementigen Vektoren gilt, weshalb $(c_1, c_2)^T$ geeignete homogene Koordinaten auf der Geraden sind.

Daher entspricht der obige Bruch genau der Definition des Doppelverhältnisses $(A, B; C, D)$ unter Verwendung von homogenen Koordinaten auf einer Geraden.

Basis für die Gerade: Alternativ zur speziellen Wahl einzelner Koordinaten in $\mathbb{R}^3$ kann man auch die Situation in ihrer Allgemeinheit nehmen, und sich statt dessen gleich auf eine geeignete Basis für die Gerade konzentrieren. Nimmt man A und B als Basis dieser Geraden, so haben C und D die Form $C = c_1A + c_2B$ und $D = d_1A + d_2B$. Damit gilt in der Ebene (mit Methoden, die in Teilaufgabe b) genauer besprochen werden)

$$\frac{[O,A,C]\cdot[O,B,D]}{[O,A,D]\cdot[O,B,C]} = \frac{[O,A,c_1A+c_2B]\cdot[O,B,d_1A+d_2B]}{[O,A,d_1A+d_2B]\cdot[O,B,c_1A+c_2B]} = \frac{c_2[O,A,B]\cdot d_1[O,B,A]}{d_2[O,A,B]\cdot c_1[O,B,A]} = \frac{c_2\cdot d_1}{d_2\cdot c_1}$$

und auf der Gerade

$$\frac{[A,C]\cdot[B,D]}{[A,D]\cdot[B,C]} = \frac{\begin{vmatrix}1 & c_1\\0 & c_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & d_1\\1 & d_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & d_1\\0 & d_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & c_1\\1 & c_2\end{vmatrix}} = \frac{c_2\cdot d_1}{d_2\cdot c_1}$$

b) Es gilt per Definition, dass $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$, da das Doppelverhältnis von vier Geraden gerade über das Doppelverhältnis vier kollinearer Schnittpunkte definiert ist. Unter Verwendung von Teilaufgabe a) ist daher folgendes zu zeigen:

$$\frac{[O,A,C]\cdot[O,B,D]}{[O,A,D]\cdot[O,B,C]} = \frac{[O,A',C']\cdot[O,B',D']}{[O,A',D']\cdot[O,B',C']}$$

Betrachten wir die Determinante $[O, A', C']$. Da der Punkt A' auf a liegt, gibt es $\lambda_a, \mu_a \in \mathbb{R}$ mit $A' = \lambda_aO + \mu_aA$. Da O verschieden von A' ist, ist außerdem $\mu_a \neq 0$. Analoges gilt für $C' = \lambda_cO + \mu_cC$. Damit kann man die Determinante vereinfachen, wobei die Multilinearität zum Aufteilen genutzt wird und Determinanten mit linear abhängigen Spalten wegfallen.

$$\begin{aligned}[O,A',C'] &= [O,\lambda_aO+\mu_aA,\lambda_cO+\mu_cC]\\ &= [O,\lambda_aO,\lambda_cO]+[O,\lambda_aO,\mu_cC]+[O,\mu_aA,\lambda_cO]+[O,\mu_aA,\mu_cC]\\ &= \lambda_a\lambda_c\cdot[O,O,O]+\lambda_a\mu_c\cdot[O,O,C]+\mu_a\lambda_c\cdot[O,A,O]+\mu_a\mu_c\cdot[O,A,C]\\ &= \mu_a\mu_c\cdot[O,A,C]\end{aligned}$$

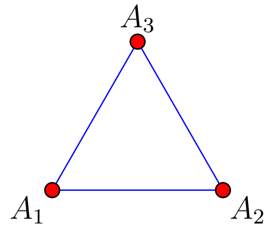
Damit gilt für die gesamte Formel

$$\frac{[O,A',C']\cdot[O,B',D']}{[O,A',D']\cdot[O,B',C']} = \frac{\mu_a\mu_c[O,A,C]\cdot\mu_b\mu_d[O,B,D]}{\mu_a\mu_d[O,A,D]\cdot\mu_b\mu_c[O,B,C]} = \frac{[O,A,C]\cdot[O,B,D]}{[O,A,D]\cdot[O,B,C]}$$

Aufgabe 20. Harmonische Lage am Dreieck.

Gegeben sei ein (nicht-entartetes) Dreieck mit den Eckpunkten A_1, A_2 und A_3 im $\mathbb{RP}^2$.

a) Wählen Sie drei Punkte B_1, B_2, B_3 auf den drei Dreiecksseiten, so dass B_1 auf der Dreiecksseite A_2A_3, B_2 auf der Dreiecksseite A_1A_3 und B_3 auf der Dreiecksseite A_1A_2 liegt und sich die drei Strecken A_iB_i für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ in einem Punkt schneiden.



b) Bestimmen Sie nun drei weitere Punkte C_1, C_2, C_3 mit folgender Eigenschaft:

Für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ liege C_i auf der Geraden durch die Punkte A_j und A_k, und die Punkte A_j, A_k, B_i, C_i sind in harmonischer Lage, d.h. $(A_j, A_k; B_i, C_i) = -1$.

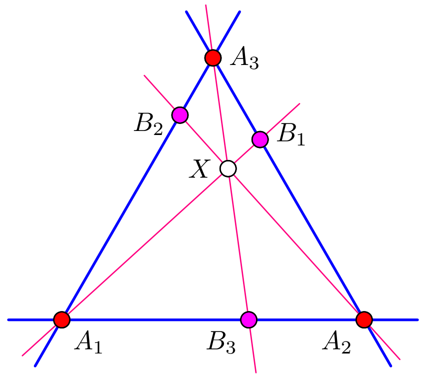
c) Zeigen Sie: Die so konstruierten Punkte C_1, C_2 und C_3 sind kollinear.

d) Interpretieren Sie die obige Konstruktion unter der Voraussetzung, dass die Punkte C_1, C_2 und C_3 Fernpunkte sind.

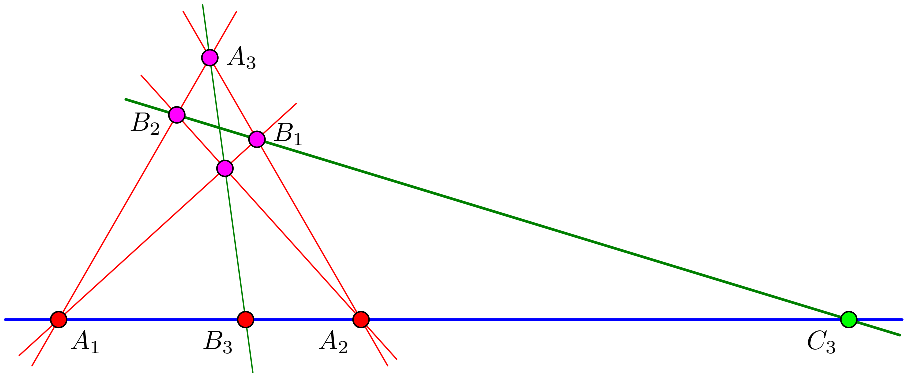
LÖSUNG:

a) Die Punkte B_i kann man konstruieren, indem man sich den gemeinsamen Schnittpunkt X aller drei Geraden $A_i \vee B_i$ im inneren des Dreiecks beliebig wählt. B_i liegt dann auf dem Schnittpunkt von A_iX mit der A_i gegenüberliegenden Dreieckskante $A_j \vee A_k$.

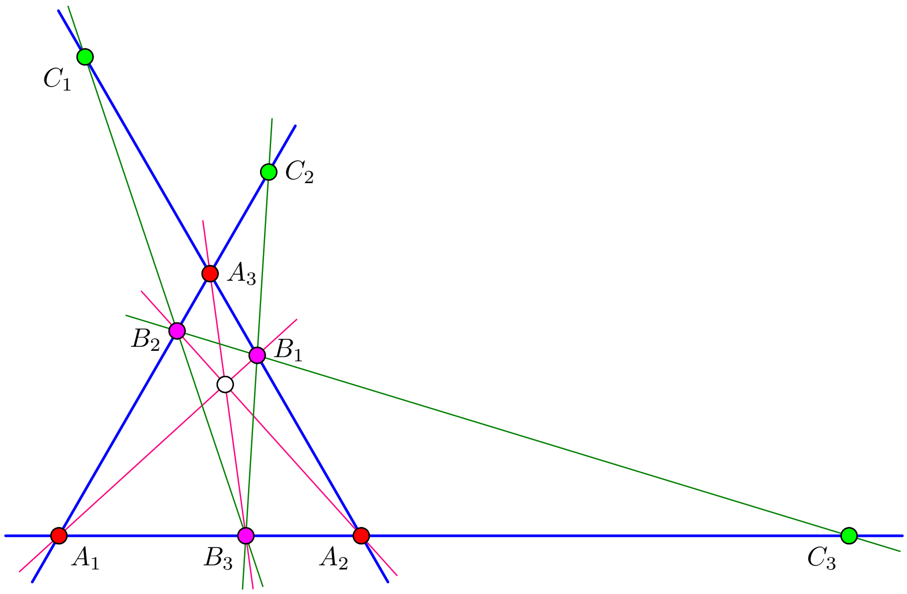
Alternativ kann man auch B_1 und B_2 beliebig auf der entsprechenden Dreieckskante wählen. Damit ist der gemeinsame Schnittpunkt festgelegt als Schnittpunkt $X = (A_1 \vee B_1) \wedge (A_2 \vee B_2)$, und damit auch $B_3 = (A_3 \vee X) \wedge (A_1 \vee A_2)$.



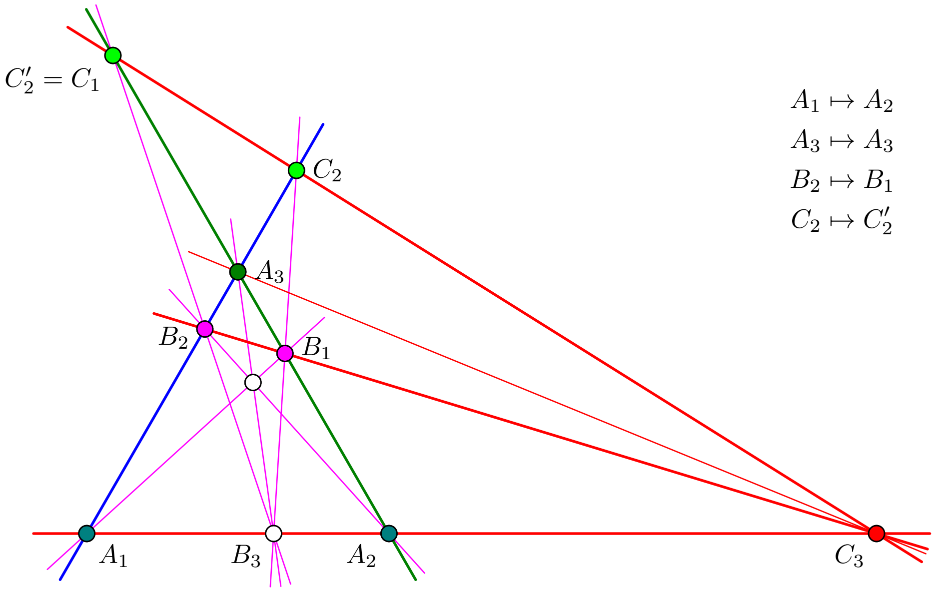
b) Die harmonischen Punkte C_i kann man direkt aus den bisher in der Konstruktion vorhandenen Punkten und Geraden ermitteln. So ergibt sich etwa der Punkt C_3 als Schnitt der Dreiecksgeraden $A_1 \vee A_2$ mit der Verbindungsgeraden $B_1 \vee B_2$.



Die beiden anderen harmonischen Punkte ergeben sich analog.



c) Betrachten wir die projektive Abbildung mit Zentrum C_3, die die (blaue) Gerade durch die Punkte A_1 und A_3 auf die (grüne) Gerade durch die Punkte A_2 und A_3 abbildet. Diese Abbildung bildet A_1 auf A_2, A_3 auf A_3 und B_2 auf B_1 ab.



Das Bild C_2' von C_2 unter dieser Abbildung liegt mit C_2 und C_3 auf einer (roten) Geraden, da es sich um eine Zentralprojektion handelt. Da die Zentralprojektion von einer Geraden auf eine andere projektiv ist und somit Doppelverhältnisse erhält, gilt $(A_2, A_3; B_1, C_2') = (A_1, A_3; B_2, C_2) = -1$. Durch dieses Doppelverhältnis ist der Punkt C_2' auf der (grünen) Geraden $A_2 \vee A_3$ bereits eindeutig festgelegt. Nach Konstruktion ist C_1 genau dieser harmonische Punkt, so dass C_1 und C_2' identisch sein müssen.

Da C_2' aufgrund der Projektion kollinear mit C_2 und C_3 ist, und aufgrund des Doppelverhältnisses identisch mit C_1 ist, muss auch C_1 kollinear mit C_2 und C_3 sein.

d) Wenn C_1, C_2, C_3 Fernpunkte sind, dann liegt B_i in der Mitte von A_j und A_k ($\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$) und es ergibt sich der Satz, dass die Seitenhalbierenden eines Dreiecks sich in einem Punkt schneiden. Dabei ist natürlich die Rolle von Voraussetzung und Schlussfolgerung gegenüber dem usrprünglichen Satz etwas verändert.

Aufgabe 21. Sechs Punkte auf einem Kegelschnitt.

Es seien fünf Punkte $P_1, \ldots, P_5$ im $\mathbb{RP}^2$ gegeben. Sie bestimmen im Allgemeinen einen Kegelschnitt

$$C = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot xy + e \cdot yz + f \cdot xz = 0\}.$$

Zeigen Sie, dass ein Punkt P_6 genau dann auf C liegt, wenn

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & y_1z_1 & x_1z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2y_2 & y_2z_2 & x_2z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3y_3 & y_3z_3 & x_3z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4y_4 & y_4z_4 & x_4z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5y_5 & y_5z_5 & x_5z_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6y_6 & y_6z_6 & x_6z_6 \end{pmatrix} = 0$$

Hinweis: Im $\mathbb{R}^d$ wird durch $d-1$ Punkte $a_1, \ldots, a_{d-1}$ ein $d-1$-dimensionaler Unterraum mit der Formel $\langle h, a\rangle = 0$ aufgespannt. Ein Punkt a liegt also genau dann in diesem Unterraum, wenn $\langle h, a\rangle = 0$, aber auch genau dann, wenn $\det(a_1, \ldots, a_{d-1}, a) = 0$.

LÖSUNG:

Es gibt verschiedene Herangehensweisen, wie man sich den Sachverhalt dieser Aufgabe vorstellen kann.

Unterraum: Wenn die fünf Punkte $1, \dots, 5$ einen eindeutigen Kegelschnitt $C = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{RP}^2 : a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot xy + e \cdot yz + f \cdot xz = 0\}$ definieren, so muss der Vektor (a, b, c, d, e, f) vom Nullvektor verschieden und bis auf skalare Vielfache eindeutig definiert sein durch die Bedingungen

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_i^2 \\ y_i^2 \\ z_i^2 \\ x_i y_i \\ y_i z_i \\ x_i z_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \tag{$*$}$$

für $i = 1, \dots, 5$. Dies bedeutet, dass die Vektoren $v_i = (x_i^2, y_i^2, z_i^2, x_i y_i, y_i z_i, x_i z_i)$ für $i = 1, \dots, 5$ linear unabhängig sein müssen. Sie spannen eine linearen Unterraum des $\mathbb{R}^6$ mit Kodimension 1, also Dimension 5 auf.

Für einen sechsten Punkt muss die Gleichung $(*)$ ebenfalls gelten. Also muss v_6 im linearen Spann der $v_1, \dots, v_5$ liegen, was gleichbedeutend mit $\det(v_1, \dots, v_6) = 0$ ist.

Gleichungssystem: Das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1 y_1 & y_1 z_1 & x_1 z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2 y_2 & y_2 z_2 & x_2 z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3 y_3 & y_3 z_3 & x_3 z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4 y_4 & y_4 z_4 & x_4 z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5 y_5 & y_5 z_5 & x_5 z_5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

kann verwendet werden, um den Parametervektor $(a, b, c, d, e, f)^T$ aus fünf gegebenen Punkten zu bestimmen. Dieses Gleichungssystem bestimmt genau dann einen Kegelschnitt eindeutig, wenn der Parametervektor bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt ist. Diesen eindimensionalen Lösungsraum erhält man genau dann, wenn die Matrix vollen Rang hat und die Zeilen daher linear unabhängig sind.

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1 y_1 & y_1 z_1 & x_1 z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2 y_2 & y_2 z_2 & x_2 z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3 y_3 & y_3 z_3 & x_3 z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4 y_4 & y_4 z_4 & x_4 z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5 y_5 & y_5 z_5 & x_5 z_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6 y_6 & y_6 z_6 & x_6 z_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kommt ein sechster Punkt dazu, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder die neue Zeile ist linear abhängig von den anderen Zeilen. Dann hat die Matrix nach wie vor Rang 5 und der Lösungsraum Dimension 1. Die sechste Zeile ist von den 5 Zeilen darüber linear abhängig, und die Determinante ist 0. Das Gleichungssystem ist nicht eindeutig lösbar, da skalare Vielfache ja immernoch möglich sind.

Im anderen Fall ist die neue Zeile linear unabhängig von den anderen Zeilen. Dann hat die Matrix Rang 6, und eine von 0 verschiedene Determinante. In diesem Fall ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, aber die einzige Lösung ist der Nullvektor, der keinen Kegelschnitt beschreibt, da die Gleichung $0 = 0$ von jedem Punkt erfüllt wird.

Daher ist die Determinante genau dann 0, wenn der sechste Punkt den Lösungsraum nicht verändert und sich somit auf dem von den anderen fünf Punkten definierten Kegelschnitt befindet.

— *Hausaufgaben* —

Aufgabe 22. Doppelverhältnisse permutiert.

a) Für vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 sei das Doppelverhältnis $(P_1, P_2; P_3, P_4) = \lambda$. Berechnen Sie für alle Permutationen $\pi \in S_n$ das Doppelverhältnis $(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}; P_{\pi(3)}, P_{\pi(4)})$.

b) Gegeben seien drei Punkte auf einer Geraden im $\mathbb{RP}^2$. Konstruieren Sie einen vierten Punkt, so dass alle vier Punkte in harmonischer Lage sind.

Wie viele Möglichkeiten haben Sie, diesen vierten Punkt zu konstruieren?

Lösung:

a) Es gibt $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ Möglichkeiten, wie die vier Punkte auf die vier Positionen der Formel verteilt sein können. Da das Doppelverhältnis projektiv invariant ist, und eine projektive Transformation auf der Gerade durch drei Paare von Urbild und Bild eindeutig definiert ist, kann man o.B.d.A. drei der Punkte frei wählen. Am geschicktesten wählt man diese Punkte möglichst einfach:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich bereits das in der Angabe vorgegebene Doppelverhältnis:

$$(P_1, P_2; P_3, P_4) = \frac{[P_1P_3][P_2P_4]}{[P_1P_4][P_2P_3]} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(-\lambda) \cdot 1}{(-1) \cdot 1} = \lambda$$

Jetzt kann man entweder für alle 24 Permutationen das Doppelverhältnis wie eben ausrechnen, oder aber sich anhand der Struktur des Doppelverhältnisses überlegen, dass immer vier Permutationen den gleichen Wert ergeben müssen, und die verbleibenden 6 Möglichkeiten ausprobieren. Man erhält:

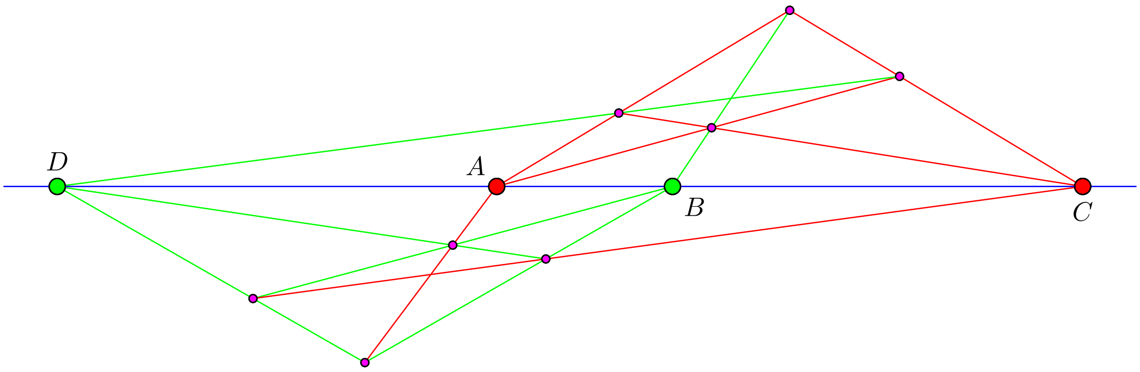
$$\begin{aligned}
(P_1, P_2; P_3, P_4) &= (P_2, P_1; P_4, P_3) = (P_4, P_3; P_2, P_1) = (P_3, P_4; P_1, P_2) = \lambda \\
(P_1, P_2; P_4, P_3) &= (P_2, P_1; P_3, P_4) = (P_3, P_4; P_2, P_1) = (P_4, P_3; P_1, P_2) = \tfrac{1}{\lambda} \\
(P_1, P_3; P_2, P_4) &= (P_3, P_1; P_4, P_2) = (P_4, P_2; P_3, P_1) = (P_2, P_4; P_1, P_3) = 1 - \lambda \\
(P_1, P_3; P_4, P_2) &= (P_3, P_1; P_2, P_4) = (P_2, P_4; P_3, P_1) = (P_4, P_2; P_1, P_3) = \tfrac{1}{1-\lambda} \\
(P_1, P_4; P_2, P_3) &= (P_4, P_1; P_3, P_2) = (P_3, P_2; P_4, P_1) = (P_2, P_3; P_1, P_4) = 1 - \tfrac{1}{\lambda} \\
(P_1, P_4; P_3, P_2) &= (P_4, P_1; P_2, P_3) = (P_2, P_3; P_4, P_1) = (P_3, P_2; P_1, P_4) = \tfrac{\lambda}{\lambda-1}
\end{aligned}$$

b) Vier Punkte A, B, C, D sind genau dann in harmonischer Lage, wenn für ihr Doppelverhältnins $\lambda = (A, B; C, D) = -1$ gilt. Somit nimmt das Doppelverhältnis bei Permutation von vier Punkten in harmonischer Lage nur noch drei verschiedene Werte an:

$$\begin{array}{ccccc}
\lambda & = & \frac{1}{\lambda} & = & -1 \\
1 - \lambda & = & 1 - \frac{1}{\lambda} & = & 2 \\
\frac{1}{1-\lambda} & = & \frac{\lambda}{\lambda-1} & = & \frac{1}{2}
\end{array}$$

Es gibt also drei verschiedene Möglichkeiten, einen vierten Punkt einzuzeichnen, so dass sich die vier Punkte in harmonischer Lage befinden. Für jede dieser drei Möglichkeiten gibt es dann entsprechend acht verschiedene Möglichkeiten, die Punkte mit A, B, C, D zu bezeichnen.

Andere Überlegung: Die harmonische Lage ist nur bezüglich der Menge $\{\{A, B\}, \{C, D\}\}$ bestimmt. Die Reihenfolge in den einzelnen Mengen ändert nichts an der harmonischen Lage. Das entspricht den 8 Permutationen zu λ und $\frac{1}{\lambda}$ in Teilaufgabe a). Es macht also Sinn, von der harmonischen Lage von einem Punktepaar zu einem anderen zu sprechen. Auch bei der Konstruktion ist es egal, welches Punktepaar mit den Diagonalen des Hilfsvierecks assoziiert wird, und welches mit den Schnittpunkten gegenüberliegender Kanten, wie in der nächsten Abbildung illustriert.



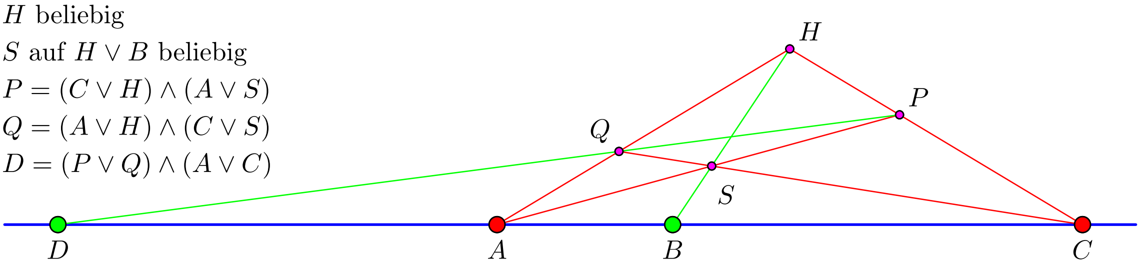
Es gibt 3 verschiedene Möglichkeiten, die drei vorgegebenen Punkte in ein Punktepaar und einen einzelnen Punkt aufzugliedern. Der zu dem einzelnen Punkt passende harmonische Partner ist damit eindeutig festgelegt.

Die drei Möglichkeiten, einen vierten Punkt harmonisch zu den drei vorhandenen Punkten zu konstruieren, sehen wie folgt aus. Dabei nehmen wir an, dass A, B, C in dieser Reihenfolge auf der Gerade liegen, und der Punkt D harmonisch zu den anderen konstruiert werden soll.

$\boldsymbol{(A, C; B, D) = -1}$**:** Punkt D „außerhalb" der drei vorgegebenen Punkte.

Konstruktion:

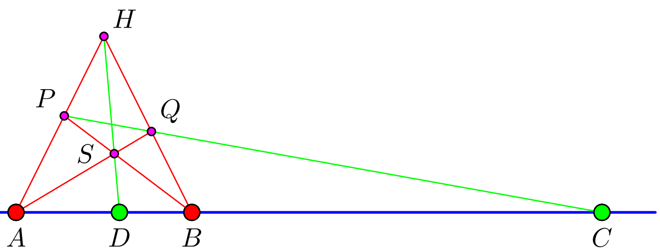
1. H beliebig
2. S auf $H \vee B$ beliebig
3. $P = (C \vee H) \wedge (A \vee S)$
4. $Q = (A \vee H) \wedge (C \vee S)$
5. $D = (P \vee Q) \wedge (A \vee C)$



$\boldsymbol{(A, B; C, D) = -1}$**:** Punkt D zwischen den „vorderen" beiden Punkten.

Konstruktion:

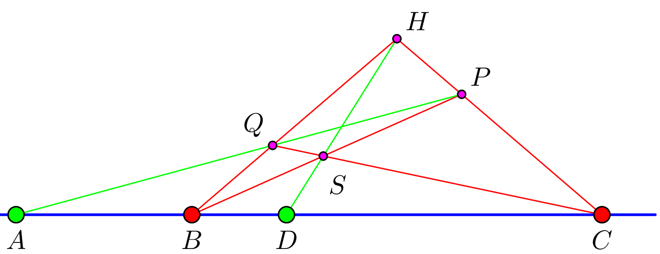
1. H beliebig
2. P auf $H \vee A$ beliebig
3. $Q = (C \vee P) \wedge (B \vee H)$
4. $S = (A \vee Q) \wedge (B \vee P)$
5. $D = (H \vee S) \wedge (A \vee B)$



$\boldsymbol{(B, C; A, D) = -1}$**:** Punkt D zwischen den „hinteren" beiden Punkten.

Konstruktion:

1. H beliebig
2. P auf $H \vee C$ beliebig
3. $Q = (A \vee P) \wedge (B \vee H)$
4. $S = (B \vee P) \wedge (C \vee Q)$
5. $D = (H \vee S) \wedge (B \vee C)$



Die drei Alternativen entsprechen auch den drei Abschnitten, in die die projektive Gerade durch die drei vorgegebenen Punkte aufgeteilt wird.

Aufgabe 23. Plückers $\boldsymbol{\mu}$.

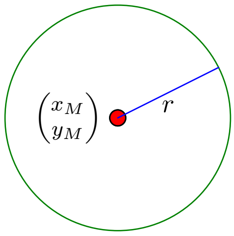
Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die auf einem gemeinsamen Definitionsbereich D definiert sind, und $P \in D$ ein beliebiges Element dieses Definitionsbereichs. Geben Sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ an, so dass die Linearkombination $\lambda f + \mu g$ der Funktionen an der Position P eine Nullstelle hat, und $(\lambda, \mu)^T \neq (0, 0)^T$.

Lösung:

Eine mögliche Lösung ist:

$$\lambda = g(P) \qquad \mu = -f(P)$$
$$(\lambda f + \mu g)(P) = g(P) \cdot f(P) - f(P) \cdot g(P) = 0$$

Aufgabe 24. Kreis als Quadrik.



Berechnen Sie die symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$, die einen Kreis mit Mittelpunkt $(x_M, y_M)^T$ und Radius r als Quadrik beschreibt.

Lösung:

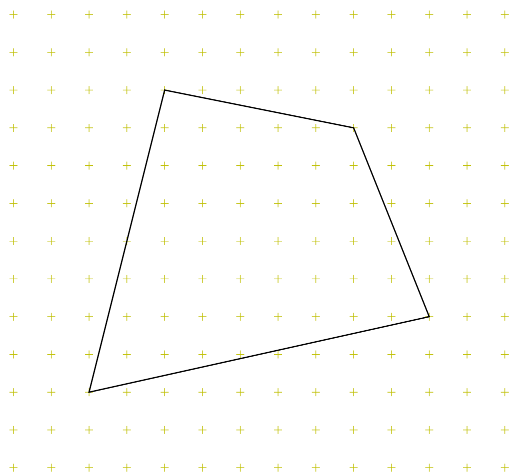
Man kann einfach die klassiche Definition eines Kreises als Gleichung aufschreiben und durch Komponentenvergleich die entsprechenden Einträge der Matrix ermitteln:

$$\begin{aligned}
\|P - M\| &= r \\
r^2 &= \|P - M\|^2 = (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 \\
0 &= (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 - r^2 = x^2 - 2xx_M + x_M^2 + y^2 - 2yy_M + y_M^2 - r^2 \\
0 &= \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_M \\ 0 & 1 & -y_M \\ -x_M & -y_M & x_M^2 + y_M^2 - r^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 25. Projektive Skalen.

Gegeben sei die folgende (unvollständige) Photographie vom Umriss eines Tic-Tac-Toe-Spielfeldes mit 3×3 quadratischen Feldern. Zeichnen Sie die Felder *perspektivisch richtig* ein. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen, und lassen Sie eventuelle Hilfskonstruktionen erkennbar.

Hinweis: Es gibt mindestens drei verschiedene Lösungswege für diese Aufgabe. Finden Sie mindestens einen möglichen Ansatz. Gerne dürfen Sie selbst nach weiteren Lösungen suchen, sich darüber mit ihren Kommilitonen austauschen oder zu gegebener Zeit in der Musterlösung nachlesen.



LÖSUNG:

Kern der Aufgabenstellung ist natürlich die Frage, wie man eine projektive Dreiteilung einer Geraden hinbekommt, um das Brett perspektivisch richtig zu unterteilen. Auf eine Gerade reduziert lautet daher die Frage: Gegeben drei Punkte, die eine projektive Skala auf der Geraden definieren, und die bezüglich einer geeigneten Basis die folgenden homogenen Koordinaten auf der Geraden haben sollen:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad P_\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gesucht wird eine Möglichkeit, die Punkte P_1 und P_2 zu konstruieren, die die Strecke P_0P_3 in drei perspektivisch gleich große Stücke teilen. Die Punkte sind durch ihr Doppelverhältnis eindeutig definiert, etwa $(P_0, P_\infty; P_1, P_3) = \frac{1}{3}$.

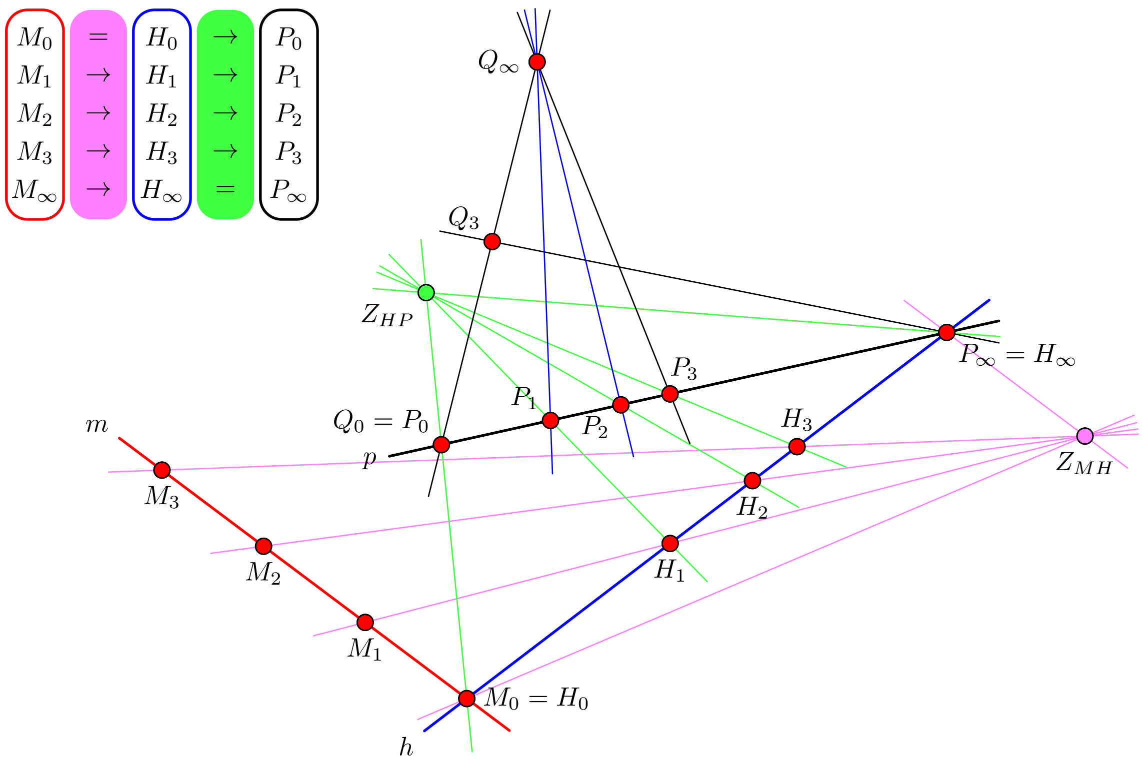
Wie in der Aufgabenstellung angekündigt, gibt es mehrere Lösungswege zu dieser Aufgabe, von denen vier im Folgenden dargestellt werden sollen.

Fixe Messlatte und doppelte Projektion: Man kann sich eine Messlatte vorgeben, also eine Gerade mit vier Punkten, so dass zwei aufeinanderfolgende Punkte zueinander gleichen Abstand haben. Da die tatsächliche Länge dieses Abstands irrelevant ist, könnte dieser Maßstab sogar mit Zirkel und Lineal konzentriert werden, ohne die Skala auf dem Lineal zu verwenden. Nennen wir die Punkte des Maßstabs mal M_0 bis M_3, und den Fernpunkt in Richtung des Maßstabs M_∞.

Jetzt besteht für eine einzelne Spielfeldkante die Aufgabe darin, eine projektive Transformation zu finden, die M_0 auf P_0 abbildet, M_3 auf P_3 und M_∞ auf P_∞, und dann M_1 und M_2 unter dieser Transformation abzubilden, um P_1 und P_2 zu erhalten. Die einfachste Möglichkeit, eine projektive Transformation zwischen zwei Geraden zu konstruieren, ist die Zentralprojektion. Diese ist im Allgemeinen bereits durch ein Paar von Urbild- und Bildpunkten definiert: wo sich die entsprechenden Projektionsstrahlen treffen, muss das Projektionszentrum liegen. Wenn man keine besonderen Vorkehrungen trifft, wird dieses Zentrum den für die projektive Skala notwendigen dritten Punkt nicht korrekt abbilden.

Wenn sich Urbild- und Bildgerade in einem Punkt schneiden, dann wird dieser Punkt unabhängig vom Projektionszentrum auf sich selbst abgebildet. Diesen Umstand kann man nutzen, um eine Projektion zu finden, die drei Punkte wohl definiert aufeinander abbildet: den Schnittpunkt auf sich selbst, und zwei andere Punkte auf ihre Bildpunkte, so dass die zugehörigen Projektionsstrahlen das Zentrum definieren. Da wir den Maßstab in beliebiger Position angenommen haben, können wir zwei Zentralprojektionen hintereinander ausführen, die jeweils einen der Skalenpunkte fix lassen. Als Zwischenschritt tritt dabei eine Hilfsgerade h auf, auf der die Punkte H_0 bis H_∞ eine projektive Skala bilden. Diese Skala muss einen Punkt mit der ursprünglichen Skala gemeinsam haben, und einen Punkt mit der endgültigen Skala. Ein dritter Punkt kann frei gewählt werden. Eine mögliche Abbildungsfolge ist

$$\begin{array}{ccccc} M_0 & = & H_0 & \to & P_0 \\ M_3 & \to & H_3 & \to & P_3 \\ M_\infty & \to & H_\infty & = & P_\infty \end{array} \quad .$$



Konstruktionsbeschreibung:

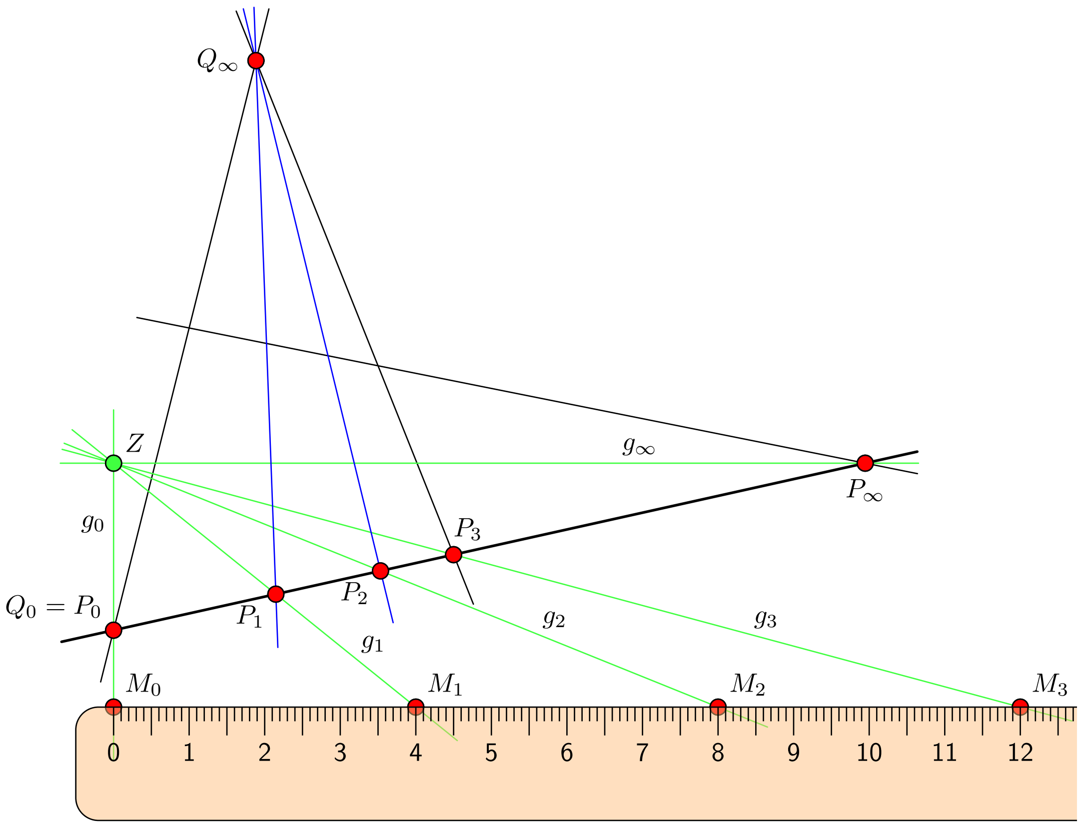
1. Zeichne Messgerade m beliebig, und markiere auf dieser vier äquidistante Punkte M_0 bis M_3.
2. Schnittpunkte gegenüberliegender Spielbrettkanten sind die perspektivischen Fernpunkte P_∞ und Q_∞.
3. Zeichne Hilfsgerade $h = M_0 \vee P_\infty$.
4. Wähle H_3 beliebig auf h.
5. Konstruiere $M_\infty \vee H_\infty$, eine Parallele zu m durch P_∞.
6. Konstruiere Schnittpunkt $Z_{MH} = (M_\infty \vee H_\infty) \wedge (M_3 \vee H_3)$, das Projektionszentrum der ersten Projektion.
7. $H_1 = (M_1 \vee Z_{MH}) \wedge h$ und H_2 analog.
8. $Z_{HP} = (H_0 \vee P_0) \wedge (H_3 \vee P_3)$ ist das zweite Projektionszentrum.
9. $P_1 = (H_1 \vee Z_{HP}) \wedge p$ und P_2 analog.
10. Verbindungsgeraden $P_i \vee Q_\infty$ ergeben gewünschte Feldunterteilung in einer Richtung.
11. Analoges Vorgehen für Q_i statt P_i ergibt die dazu senkrechte Richtung. (Nicht eingezeichnet.)

Wählt man andere Punkte als gemeinsame Punkte der verschiedenen Geraden (statt hier $M_0 = H_0$ und $H_\infty = P_\infty$), oder zeichnet man Messlatte (M_0 bis M_3) sowie den frei wählbaren Skalenpunkt H_3 an anderen Positionen ein, so können deutlich andere Skizzen entstehen, obwohl das Konstruktionsprinzip das gleiche ist.

Verschiebbare Messlatte und einfache Projektion: Wenn man die Messlatte nicht von Anfang auf dem Papier vorgibt, sondern tatsächlich ein verschiebbares Lineal mit Skala in den Händen hält, kann man auch wie folgt vorgehen:

1. Wähle Projektionszentrum Z beliebig. Geschickt ist eine Wahl, bei der P_0 rein vertikal zu Z und P_∞ rein horizontal zu Z liegt, oder umgekehrt.
2. Zeichne Verbindungsgerade $g_0 = P_0 \vee Z$.
3. Zeichne Verbindungsgeraden g_3 und g_∞ analog.

4. Suche Position für das Lineal, so dass
   (a) das Lineal parallel zu g_∞ ist,
   (b) der Nullpunkt M_0 auf g_0 liegt und
   (c) der Skalenpunkt M_3 für 3 Einheiten auf g_3 liegt.
5. Zeichne an dieser Position die Punkte M_1 und M_2 für 1 bzw. 2 Einheiten an.
6. Verbinde diese Punkte mit Z.
7. Ermittle die Schnittpunkte P_1 und P_2 mit der Spielfeldkante.
8. Verbinde diese mit dem Fernpunkt Q_∞.
9. Analoges Vorgehen für Q_i statt P_i ergibt die dazu senkrechte Richtung. (Nicht eingezeichnet.)



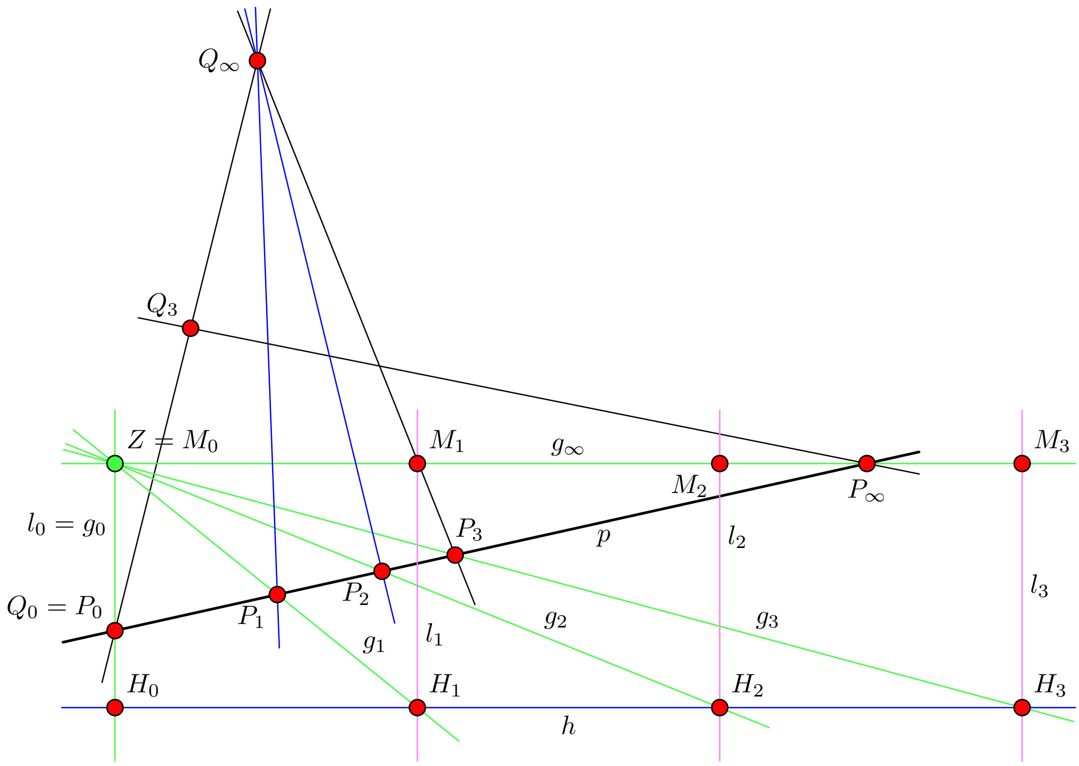
Die Parallelität zu g_∞ sorgt dafür, dass der Fenpunkt M_∞ des Lineals auf g_∞ liegt. Damit werden drei Punkte des Lineals auf drei entsprechende Punkte der Spielfeldkante abgebildet, womit die Skala richtig geeicht ist.

Gemessen an einer klassischen Konstruktionsbeschreibung ist diese Beschreibung natürlich etwas unpräzise. Systematisch kann man die korrekte Position für das Lineal auch finden, wenn man es am Anfang mit dem Nullpunkt auf Z an g_∞ anlegt und von da parallel entlang g_o verschiebt, bis g_3 den Skalenpunkt für 3 Einheiten trifft. Dieses Vorgehen kann man auch zu einer Konstruktion umformulieren, die ohne verschiebbare Lineale auskommt.

Konstruktionsbeschreibung:

1. Schnittpunkte gegenüberliegender Spielbrettkanten sind die perspektivischen Fernpunkte P_∞ und Q_∞.
2. Wähle Projektionszentrum Z beliebig.
3. Verbindung von Z mit P_0, P_3 und P_∞; ergibt g_0, g_3 und g_∞.
4. Markiere von $Z = M_0$ aus drei weitere äquidistante Punkte M_1, M_2, M_3 auf g_∞.
5. Zeichne Parallelen l_i zu g_0 durch M_i für $i = \{1, 2, 3\}$.
6. Schnittpunkt $H_3 = l_3 \wedge g_3$.
7. Zeichne Parallele h zu g_∞ durch H_3.
8. Schnittpunkt $H_1 = l_1 \wedge h$, H_2 analog.

9. Verbindungsgerade $g_1 = H_1 \vee Z$, g_2 analog.
10. Schnittpunkt $P_1 = g_1 \wedge p$, P_2 analog.
11. Verbindungsgeraden $P_i \vee Q_\infty$ ergeben gewünschte Feldunterteilung in einer Richtung.
12. Analoges Vorgehen für Q_i statt P_i ergibt die dazu senkrechte Richtung. (Nicht eingezeichnet.)

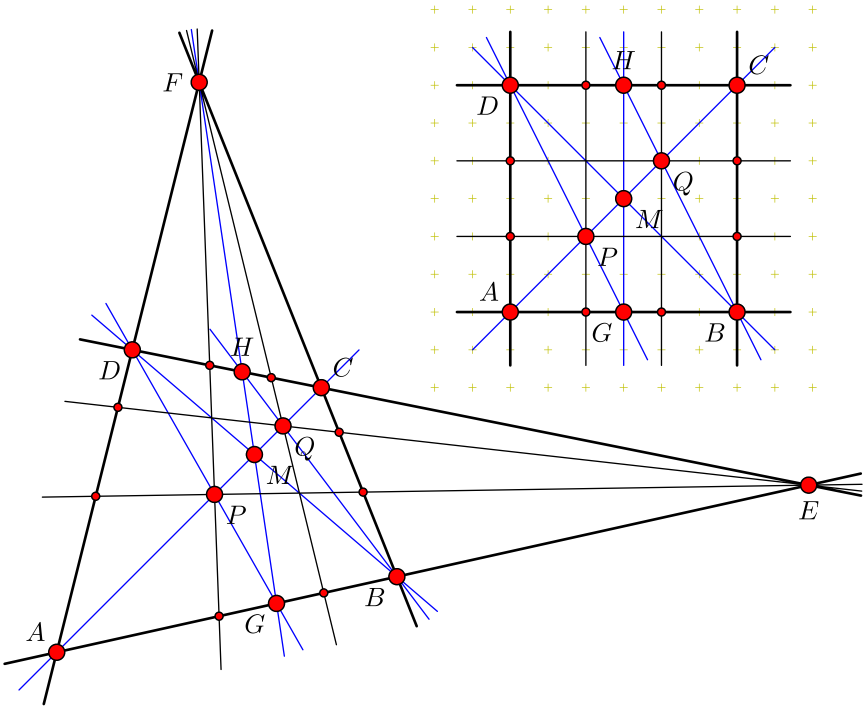


Die Parallelverschiebung von M_i auf H_i kann man natürlich wieder als eine Zentralprojektion mit einem Fernpunkt als Zentrum auffassen. In diesem Sinne arbeitet auch dieser Ansatz mit zwei Projektionen, und der Fernpunkt $M_\infty = H_\infty$ ist den ersten beiden der projizierten Geraden gemeinsam.

Reine Inzidenz-Geometrie ohne Lineal: Man kann die Dreiteilung eines Quadrates auch allein durch die Operationen Schnittpunkt und Verbindungsgerade konstruieren, analog zu der Schachbrett-Aufgabe (Aufgabe 6 auf Blatt 1).

Konstruktionsbeschreibung:

1. Bezeichne Ecken des Spielfelds mit A, B, C, D.
2. Konstruiere Fernpunkte $E = (A \vee B) \wedge (C \vee D)$ und $F = (A \vee D) \wedge (B \vee C)$.
3. Mittelpunkt $M = (A \vee C) \wedge (B \vee D)$.
4. Seitenmitten $G = (A \vee B) \wedge (M \vee F)$ und $H = (C \vee D) \wedge (M \vee F)$.
5. Schnittpunkte $P = (D \vee G) \wedge (A \vee C)$ und $Q = (B \vee H) \wedge (A \vee C)$.
6. Die Verbindungsgeraden $P \vee E$, $Q \vee E$, $P \vee F$ und $Q \vee F$ teilen das Spielbrett in drei mal drei perspektivisch gleich große Teile.



Diese Art der Dreiteilung funktioniert, weil die konstruierte Konfiguration in der Ebene ein Quadrat drittelt, wie man leicht anhand einer Skizze wie der in der rechten oberen Ecke überprüfen kann. Da Inzidenzen projektiv invariant sind, kann man die Konstruktion genauso im projektiv verzerrten Quadrat ausführen, und erhält eine projektiv verzerrte Dreiteilung.

Diese Konstruktion funktioniert für die Dreiteilung einer Strecke, nicht aber für eine Unterteilung mit beliebiger Anzahl der Teile, im Unterschied zu den vorher angegebenen Konstruktionsmethoden.

Numerischer Ansatz: Nachdem das Brett in ein Koordinatengitter eingezeichnet ist, kann man für die Eckpunkte Koordinaten vergeben, daraus eine geeignete projektive Transformation eines ebenen Quadrates errechnen. Gesucht ist eine Matrix für die projektive Transformation, die durch die folgenden vier Punktepaare beschrieben ist:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}9\\2\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}7\\7\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}2\\8\\1\end{pmatrix}$$

Mit der Methode aus Aufgabe 16 von Blatt 3 kann man dazu die folgende (etwas hässliche) Abbildungsmatrix ermitteln:

$$M = \begin{pmatrix}378 & 98 & 0\\ 84 & 392 & 0\\ 19 & 26 & 69\end{pmatrix}$$

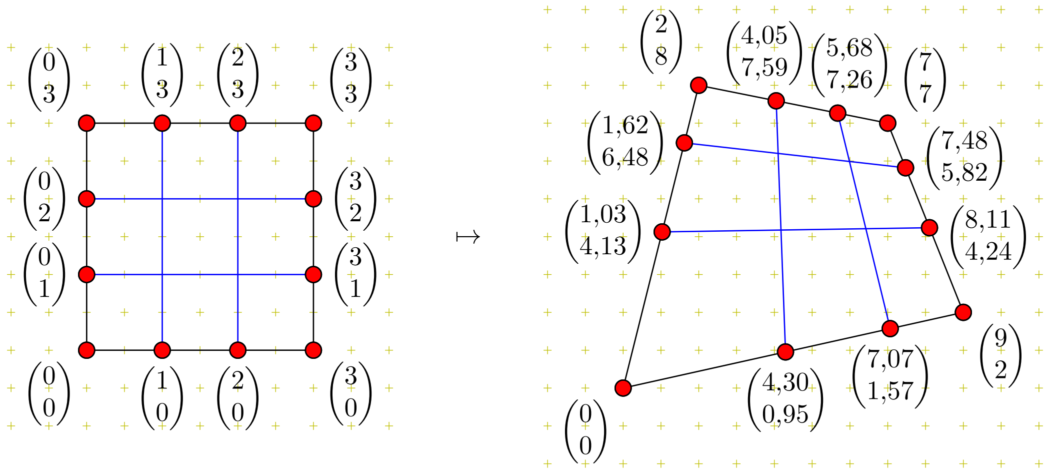
Diese Matrix kann man jetzt verwenden, um die für die Dreiteilung benötigten Punkte zu berechnen.

$$M\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}189\\42\\44\end{pmatrix} \approx 88\begin{pmatrix}4{,}30\\0{,}95\\1\end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}756\\168\\107\end{pmatrix} \approx 107\begin{pmatrix}7{,}07\\1{,}57\\1\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}336\\630\\83\end{pmatrix} \approx 166\begin{pmatrix}4{,}05\\7{,}59\\1\end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1050\\1344\\185\end{pmatrix} \approx 185\begin{pmatrix}5{,}68\\7{,}26\\1\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}98\\392\\95\end{pmatrix} \approx 95\begin{pmatrix}1{,}03\\4{,}13\\1\end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}196\\784\\121\end{pmatrix} \approx 121\begin{pmatrix}1{,}62\\6{,}48\\1\end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}308\\161\\38\end{pmatrix} \approx 152\begin{pmatrix}8{,}11\\4{,}24\\1\end{pmatrix} \qquad M\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}665\\518\\89\end{pmatrix} \approx 178\begin{pmatrix}7{,}48\\5{,}82\\1\end{pmatrix}$$



Natürlich macht es wenig Sinn, diese Berechnungen von Hand anzustellen. Daher ist diese Lösungsmethode für die Klausur ungeeignet. Da wäre eine konstruktive Methode vorzuziehen.