



— Präsenzaufgaben —

Aufgabe 13. Dualisieren.

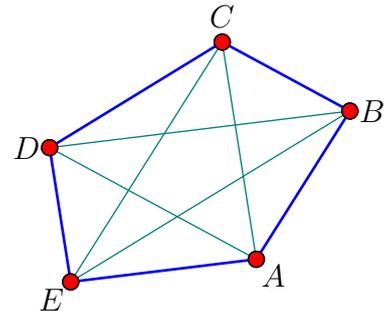
Gegeben sei der folgende Satz:

Wenn für fünf Punkte A, B, C, D, E in \mathbb{R}^2 die folgenden vier Paare von Verbindungsgeraden parallel sind:

$$\begin{array}{ll} (A \vee B) \parallel (C \vee E) & (B \vee C) \parallel (D \vee A) \\ (C \vee D) \parallel (E \vee B) & (D \vee E) \parallel (A \vee C) \end{array}$$

dann ist auch das folgende Geradenpaar parallel:

$$(E \vee A) \parallel (B \vee D)$$



- Formulieren Sie eine projektive (d.h. unter projektiven Transformationen invariante) Verallgemeinerung dieses Satzes, und skizzieren Sie dessen Konfiguration bildlich.
- Formulieren Sie den dazu dualen Satz, und skizzieren Sie auch diesen.

LÖSUNG:

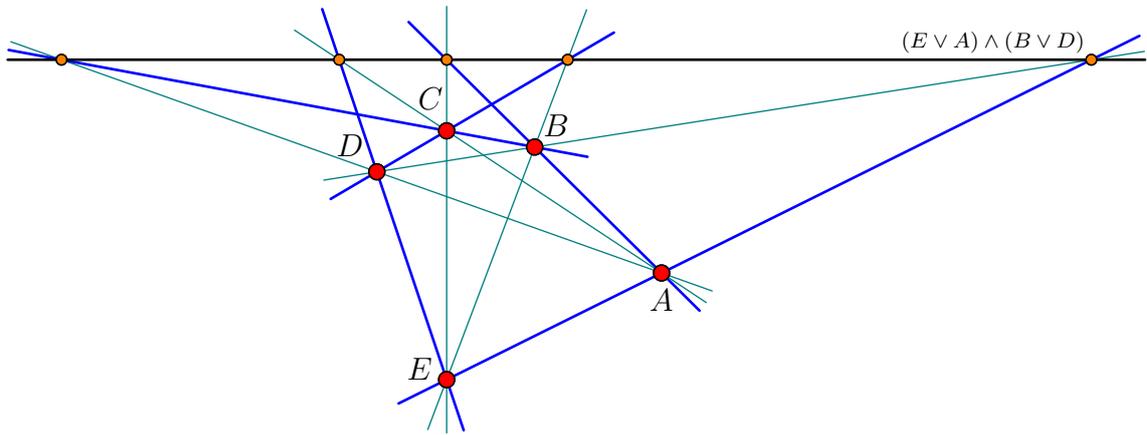
- Projektiv gesehen schneiden sich alle Geraden, die in der ursprünglichen Formulierung des Satzes parallel sind, in Punkten auf der Geraden im Unendlichen. Wenn der Satz projektiv invariant sein soll, muss diese Sonderrolle der Geraden im Unendlichen aufgegeben werden, und die Formulierung statt dessen von einer beliebigen Geraden ausgehen. Damit erhält man den folgenden Satz:

Wenn für fünf Punkte A, B, C, D, E in \mathbb{RP}^2 die folgenden vier Schnittpunkte von Verbindungsgeraden alle auf einer gemeinsamen Geraden liegen:

$$(A \vee B) \wedge (C \vee E) \quad (B \vee C) \wedge (D \vee A) \quad (C \vee D) \wedge (E \vee B) \quad (D \vee E) \wedge (A \vee C)$$

dann liegt auch der folgende Schnittpunkt auf der gleichen Geraden:

$$(E \vee A) \wedge (B \vee D)$$



Eine exakte Konstruktion dieses allgemeinen projektiven Satzes ist sehr schwierig, alleine mit einem Lineal sogar unmöglich. Daher muss man bei dieser Skizze im Allgemeinen etwas „schummeln“, beispielsweise Geraden verbiegen.

b) Den dualen Satz erhält man, wenn man konsequent die folgenden Paare von Begriffen vertauscht:

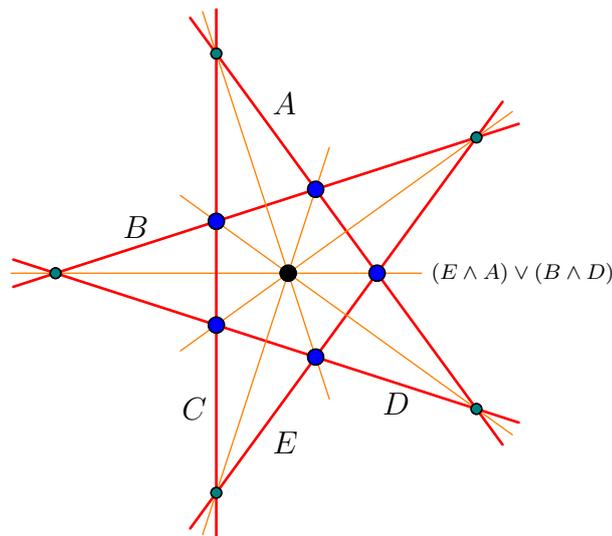
Punkt	\longleftrightarrow	Gerade
Verbindungsgerade	\longleftrightarrow	Schnittpunkt
\vee	\longleftrightarrow	\wedge
kollinear	\longleftrightarrow	konkurrent
liegen auf einer Gerade	\longleftrightarrow	gehen durch einen Punkt

Wenn für fünf Geraden A, B, C, D, E in \mathbb{RP}^2 die folgenden vier Verbindungsgeraden von Schnittpunkten alle durch einen gemeinsamen Punkt gehen:

$$(A \wedge B) \vee (C \wedge E) \quad (B \wedge C) \vee (D \wedge A) \quad (C \wedge D) \vee (E \wedge B) \quad (D \wedge E) \vee (A \wedge C)$$

dann geht auch die folgende Verbindungsgerade durch den gleichen Punkt:

$$(E \wedge A) \vee (B \wedge D)$$



Aufgabe 14. Satz von Menelaos.

Es seien A, B und P drei kollineare Punkte im \mathbb{R}^3 , und $A \neq B$. Die *gerichtete Distanz* $GD(A, B, P)$ von A zu P , gemessen in Richtung B , ist definiert als $\pm \|A - P\|$, wobei das Vorzeichen genau dann negativ ist, wenn P und B auf unterschiedlichen Seiten von A liegen. Darauf aufbauend ist das *Teilverhältnis* $TV(A, B, P)$, in dem der Punkt P die Strecke AB teilt, definiert als:

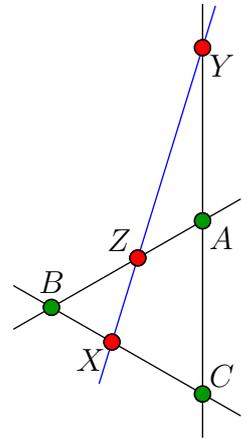
$$TV(A, B, P) := \frac{GD(A, B, P)}{GD(B, A, P)}$$

- a) Es seien A und B zwei Vektoren im \mathbb{R}^3 , die direkt (d.h. ohne Skalieren) Punkten in der projektiven Zeichenebene entsprechen. Weiterhin seien $(\lambda, \mu)^T$ die homogenen Koordinaten eines Punktes $[P]$ auf der projektiven Geraden $[A][B]$ bezüglich der Basis A, B . Berechnen Sie $TV(A, B, P)$ in Abhängigkeit von λ und μ .
- b) Jetzt seien A, B und C die Einheitsvektoren des \mathbb{R}^3 und X, Y und Z Punkte auf den Verbindungsgeraden von je zwei dieser Punkte, wie in nebenstehender Skizze angegeben. Außerdem sei $\{X, Y, Z\} \cap \{A, B, C\} = \emptyset$. Beweisen Sie folgenden Satz:

X, Y und Z sind genau dann kollinear, wenn folgende Gleichung gilt:

$$TV(B, C, X) \cdot TV(C, A, Y) \cdot TV(A, B, Z) = -1$$

Betrachten Sie dabei die von A, B und C aufgespannte Ebene als projektive Zeichenebene in einer vom Standard abweichenden Einbettung, und geben sie X, Y und Z in homogenen Koordinaten auf den jeweiligen Geraden an.



- c) Argumentieren Sie, warum der gerade bewiesene Satz auch gilt, wenn A, B und C nicht die Einheitsvektoren, sondern beliebige nicht kollineare Punkte sind.

LÖSUNG:

- a) Betrachten wir zunächst die Verbindungsgerade von A und B in \mathbb{R}^3 :

$$A \vee B = \{A + \mu(B - A) \mid \mu \in \mathbb{R}\} = \{(1 - \mu)A + \mu B \mid \mu \in \mathbb{R}\} = \{\lambda A + \mu B \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1\}$$

Wenn man sich also zunächst auf Vektoren P konzentriert, die direkt in der Zeichenebene liegen, dann gilt:

$$\begin{aligned} P - A &= \lambda A + \mu B - A = (\lambda - 1)A + \mu B = -\mu A + \mu B = \mu(B - A) \\ \|P - A\| &= |\mu| \cdot \|B - A\| \\ GD(A, B, P) &= \mu \cdot \|B - A\| = \mu \cdot \|A - B\| \\ P - B &= \lambda A + \mu B - B = \lambda A + (\mu - 1)B = \lambda A - \lambda B = \lambda(A - B) \\ \|P - B\| &= |\lambda| \cdot \|A - B\| \\ GD(B, A, P) &= \lambda \cdot \|A - B\| \end{aligned}$$

Wenn man allgemeine homogene Koordinaten $(\lambda, \mu)^T$ betrachtet, dann findet man den von diesen Koordinaten repräsentierten Punkt der Geraden durch dehomogenisieren. Dabei werden die Koordinaten so skaliert, dass sie genau einen Punkt der Geraden repräsentieren.

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \sim \frac{1}{\lambda + \mu} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} \qquad \lambda' + \mu' = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} = 1$$

Damit kann man für allgemeine homogene Koordinaten auf der Geraden die gerichtete Distanz angeben als

$$GD(A, B, P) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \|B - A\| \qquad GD(B, A, P) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \|A - B\|$$

Die Längen sowie der Skalierungsfaktor kürzen sich beim Teilverhältnis, und man erhält einfach

$$TV(A, B, P) = \frac{GD(A, B, P)}{GD(B, A, P)} = \frac{\mu}{\lambda}$$

- b) Die Punkte X, Y, Z werden durch homogene Koordinaten auf den jeweiligen Geraden ausgedrückt. Es empfiehlt sich, diese bereits in einer Reihenfolge zu wählen, die zum angegebenen Teilverhältnis passt.

$$\begin{array}{lll}
 A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & X = \lambda_X B + \mu_X C = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_X \\ \mu_X \end{pmatrix} & \text{TV}(B, C, X) = \frac{\mu_X}{\lambda_X} \\
 B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & Y = \lambda_Y C + \mu_Y A = \begin{pmatrix} \mu_Y \\ 0 \\ \lambda_Y \end{pmatrix} & \text{TV}(C, A, Y) = \frac{\mu_Y}{\lambda_Y} \\
 C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & Z = \lambda_Z A + \mu_Z B = \begin{pmatrix} \lambda_Z \\ \mu_Z \\ 0 \end{pmatrix} & \text{TV}(A, B, Z) = \frac{\mu_Z}{\lambda_Z}
 \end{array}$$

Drei Punkte sind genau dann kollinear, wenn ihre Determinante 0 ist.

$$\begin{aligned}
 0 &= \det(X, Y, Z) = \begin{vmatrix} 0 & \mu_Y & \lambda_Z \\ \lambda_X & 0 & \mu_Z \\ \mu_X & \lambda_Y & 0 \end{vmatrix} = \lambda_X \cdot \lambda_Y \cdot \lambda_Z + \mu_X \cdot \mu_Y \cdot \mu_Z \\
 -\lambda_X \cdot \lambda_Y \cdot \lambda_Z &= \mu_X \cdot \mu_Y \cdot \mu_Z \\
 -1 &= \frac{\mu_X \cdot \mu_Y \cdot \mu_Z}{\lambda_X \cdot \lambda_Y \cdot \lambda_Z} = \frac{\mu_X}{\lambda_X} \cdot \frac{\mu_Y}{\lambda_Y} \cdot \frac{\mu_Z}{\lambda_Z} = \text{TV}(B, C, X) \cdot \text{TV}(C, A, Y) \cdot \text{TV}(A, B, Z)
 \end{aligned}$$

Daher ist die Determinante genau dann gleich 0, wenn das Produkt der Teilverhältnisse -1 ist. Der Fall $\lambda = 0$, der zu einer Division durch 0 führen würde, ist ausgeschlossen, da $\text{GD}(A, B, P) = 0$ nur für $A = P$ gilt, was die Angabe in diesem Fall ausschließt.

- c) Der Satz macht eine Aussage über Längenverhältnisse auf Geraden sowie über Kollinearitäten. Beide Eigenschaften bleiben unter affinen Transformationen erhalten. Affine Transformationen sind durch die Bilder von drei (nicht kollinearen) Punkten eindeutig definiert. Man könnte also jedes beliebige Dreieck affin auf das Dreieck ABC abbilden, ohne die Längenverhältnisse oder Kollinearitäten zu verändern. Daher muss der Satz, der an dieser besonderen Position Gültigkeit hat, auch allgemein gelten.

Aufgabe 15. Projektive Transformation von Geraden.

Gegeben sei eine allgemeine projektive Transformation in \mathbb{RP}^2 , repräsentiert durch die Matrix $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$. Diese bildet Punkte der projektiven Ebene auf Punkte der projektiven Ebene ab. Beweisen Sie, dass die transponierte adjunkte Matrix zu M , wie sie unten angegeben ist, die gleiche Abbildung repräsentiert, wenn man sie auf die homogenen Koordinaten von Geraden anwendet. Zeigen Sie dazu, dass die Inzidenzrelation von transformierten Punkten und Geraden mit der Inzidenz vor der Transformation übereinstimmt.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{adj}(M)^T = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

Zu zeigen ist, dass die Inzidenzrelation erhalten bleibt, wenn ein Punkt p mit der Matrix M abgebildet wird, und die Gerade l mit der Matrix $\text{adj}(M)^T$. Die Inzidenzrelation wird wie immer über das Skalarprodukt ausgedrückt.

$$\langle Mp, \text{adj}(M)^T l \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle p, l \rangle = 0$$

Es lässt sich zeigen, dass die beiden Skalarprodukte proportional zueinander sind, und der Proportionalitätsfaktor die Determinante der Matrix ist.

$$\langle Mp, \text{adj}(M)^T l \rangle = (Mp)^T \cdot (\text{adj}(M)^T l) = p^T M^T \text{adj}(M)^T l = p^T (\det(M) E_3) l = \det(M) \langle p, l \rangle$$

Wenn einem die Gleichung $M^T \operatorname{adj}(M)^T = \det(M)E_3$ nicht bereits aus der linearen Algebra bekannt ist, kann man sie entweder allgemein beweisen oder in diesem konkreten Fall direkt ausrechnen. Hier sei die konkrete Rechnung gezeigt.

Betrachtet man den Eintrag in der linken oberen Ecke des Ergebnisses, so errechnet sich dieser als Skalarprodukt der ersten Zeile von M^T mit der ersten Spalte von $\operatorname{adj}(M)^T$. Die erste Zeile von M^T ist natürlich die erste Spalte von M . Das entstehende Skalarprodukt kann man auch als eine Determinantenentwicklung auffassen.

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ d \\ g \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \end{pmatrix} \right\rangle = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

Analog kann man auch alle anderen Einträge im Ergebnis als Determinanten schreiben.

$$M^T \operatorname{adj}(M)^T = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & a & c \\ d & d & f \\ g & g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & a & b \\ d & d & e \\ g & g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & b & c \\ e & e & f \\ h & h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & a & b \\ e & d & e \\ h & g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} c & b & c \\ f & e & f \\ i & h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} c & a & c \\ f & d & f \\ i & g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c & a & b \\ f & d & e \\ i & g & h \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \det(M) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daher eignet sich $\operatorname{adj}(M)^T$ als Transformationsmatrix zur Abbildung von Geraden. Diese Matrix lässt sich ohne Division aus M berechnen, im Unterschied zu $(M^T)^{-1}$.

— Hausaufgaben —

Aufgabe 16. Projektive Transformationen.

Gegeben seien die folgenden Punkte in homogenen Koordinaten.

$$\begin{array}{llll} a = (1, 0, 0)^T & b = (0, 1, 0)^T & c = (0, 0, 1)^T & d = (1, 1, 1)^T \\ p_1 = (2, -1, 1)^T & p_2 = (-1, 2, 1)^T & p_3 = (0, 0, 1)^T & p_4 = (1, 1, 1)^T \\ p'_1 = (1, -1, 1)^T & p'_2 = (2, 2, 1)^T & p'_3 = (-1, 1, 1)^T & p'_4 = (1, 1, 1)^T \end{array}$$

Bestimmen Sie eine projektive Transformation $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, die die Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 auf die Punkte p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 abbildet, d.h. $[M \cdot p_i] = [p'_i]$ für $i = 1, \dots, 4$. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

- Bestimmen Sie eine projektive Transformation M_1 , die die Punkte a, b, c, d auf die Punkte p_1, p_2, p_3, p_4 abbildet.
- Bestimmen Sie eine projektive Transformation M_2 , die die Punkte a, b, c, d auf die Punkte p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 abbildet.
- Bestimmen Sie M .

LÖSUNG:

a) Gesucht ist eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit $\det(M) \neq 0$ und Spalten m_1, m_2, m_3 :

$$M = \begin{pmatrix} | & | & | \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Diese Matrix soll die Punkte entsprechend der Aufgabe abbilden. Durch die besonders einfachen Vektoren a, b, c kann man daraus direkt die Spalten der Matrix ablesen, bis auf ein skalares Vielfaches:

$$\begin{aligned} [M_1 \cdot a] = [m_1] = [p_1] &\implies m_1 = \lambda \cdot p_1, \\ [M_1 \cdot b] = [m_2] = [p_2] &\implies m_2 = \mu \cdot p_2, \\ [M_1 \cdot c] = [m_3] = [p_3] &\implies m_3 = \tau \cdot p_3, \end{aligned}$$

Wendet man die Matrix, soweit sie bisher bekannt ist, auf den Punkt $[d]$ an, so soll das Ergebnis ein Repräsentant von $[p_4]$ sein. Da die gesamte Matrix nur bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt ist, kann man diesen Repräsentanten frei wählen, und am einfachsten p_4 selbst verwenden:

$$[M_1 \cdot d] = [m_1 + m_2 + m_3] = [p_4] \implies m_1 + m_2 + m_3 = \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_2 + \tau \cdot p_3 = p_4.$$

Dies definiert ein lineares Gleichungssystem für λ, μ, τ :

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ p_4 \\ | \end{pmatrix}$$

Jetzt kann man konkrete Werte einsetzen und das Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit ist ein geeigneter Repräsentant von M_1 gefunden:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Das Gleichungssystem für die zweite Teilaufgabe lautet analog

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da skalare Vielfache der gesamten Matrix keinen Unterschied machen, kann man gleich einen geeigneten ganzzahligen Repräsentanten angeben.

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

c) M kann man jetzt beschreiben als eine Transformation, die erst p_1, \dots, p_4 auf a, \dots, d abbildet und dann diese Punkte auf p'_1, \dots, p'_4 abbildet. Zweiteres ist M_2 , ersteres die inverse Abbildung zu M_1 . Diese kann man durch die inverse Matrix darstellen, oder alternativ über die adjunkte Matrix, da sich diese nur durch einen skalaren Vorfaktor von der inversen Matrix unterscheidet.

$$\begin{aligned} \text{adj}(M_1) &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ M &= M_2 \cdot \text{adj}(M_1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -3 \\ -5 & -10 & 3 \\ -7 & -8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 5 & 10 & -3 \\ 7 & 8 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es empfiehlt sich natürlich, zur Probe nachzurechnen, ob die Matrix tatsächlich die Punkte wie in der Angabe gefordert abbildet.

Aufgabe 17. Dualisieren und Doppelverhältnis.

Es gilt der folgende Satz:

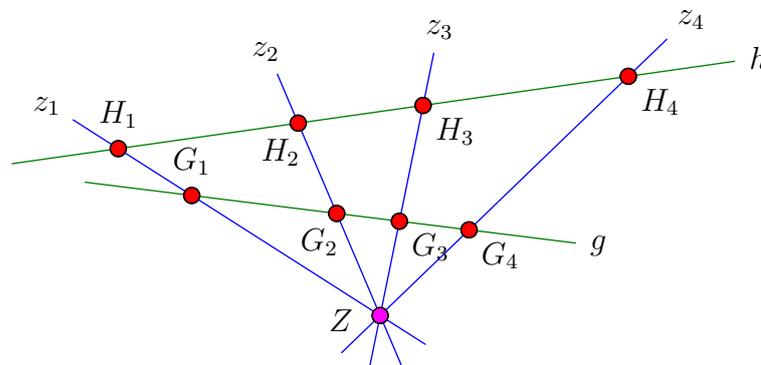
Gegeben seien zwei verschiedenen Geraden g und h in der reellen projektiven Ebene \mathbb{RP}^2 und ein Punkt Z , der weder auf g noch auf h liege. Vier paarweise verschiedene Geraden z_1, z_2, z_3, z_4 durch den Punkt Z schneiden die beiden Geraden g bzw. h in je vier Punkten G_1, G_2, G_3, G_4 bzw. H_1, H_2, H_3, H_4 , und für die beiden Doppelverhältnisse $(G_1, G_2; G_3, G_4)$ und $(H_1, H_2; H_3, H_4)$ gilt:

$$(G_1, G_2; G_3, G_4) = (H_1, H_2; H_3, H_4)$$

- Fertigen Sie eine Skizze zu diesem Satz an.
- Dualisieren Sie diesen Satz.
- Beweisen Sie diesen Satz.

LÖSUNG:

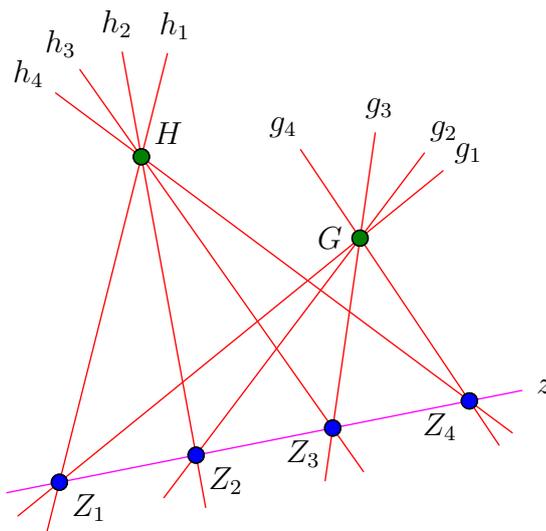
a)



- Gegeben seien zwei verschiedene Punkte G und H in der reellen projektiven Ebene \mathbb{RP}^2 und eine Gerade z , die weder durch G noch durch H gehe. Dann gilt: paarweise verschiedene Punkte Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 auf der Geraden z haben je vier Verbindungsgeraden g_1, g_2, g_3, g_4 bzw. h_1, h_2, h_3, h_4 zu den beiden Punkten G bzw. H , und für die Doppelverhältnisse der Geraden $(g_1, g_2; g_3, g_4)$ und $(h_1, h_2; h_3, h_4)$ gilt:

$$(g_1, g_2; g_3, g_4) = (h_1, h_2; h_3, h_4)$$

Skizze:



- Die Punkte H_1, H_2, H_3, H_4 gehen aus den Punkten G_1, G_2, G_3, G_4 durch Zentralprojektion der Geraden g auf die Gerade h mit Zentrum Z hervor. Die Zentralprojektion einer Geraden auf eine andere Gerade ist eine projektive Abbildung. Das Doppelverhältnis ist invariant unter projektiven Abbildungen.

Aufgabe 18. Pappos Affin und Projektiv.

In einem Dreieck mit den Seiten a , b und c sei ein beliebiger Punkt A auf b gegeben. Die Parallele zu a durch A schneidet c in einem Punkt B (siehe Abbildung), die Parallele zu b durch B schneidet a in einem Punkt C , usw. bis Punkt G .

Beweisen Sie, dass die Punkte A und G immer aufeinander liegen.

Was hat das mit dem Satz von Pappos zu tun?

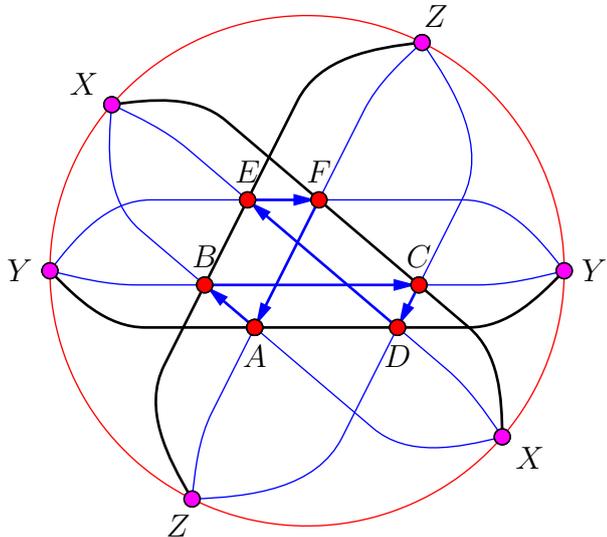
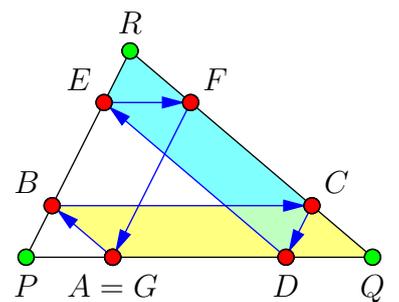
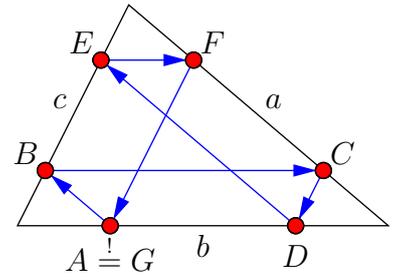
LÖSUNG:

Diese Aufgabe lässt sich mit Hilfe der vielen vorhandenen Parallelogramme durch Vektorrechnung in \mathbb{R}^2 lösen. So ist etwa $\vec{AB} = \vec{QC}$ und $\vec{DE} = \vec{CR}$, wie in der nebenstehenden Grafik illustriert. Dabei bezeichnet $\vec{AB} = B - A$ den Vektor von A nach B . Insgesamt ergibt sich damit folgende Gleichung:

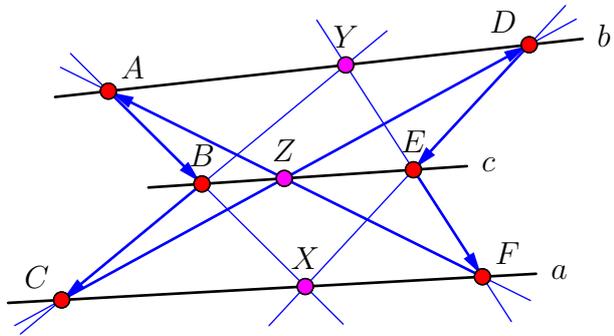
$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FG} &= \\ \vec{QC} + \vec{AQ} + \vec{BP} + \vec{CR} + \vec{PA} + \vec{RB} &= \\ \vec{QR} + \vec{PQ} + \vec{RP} &= 0 \end{aligned}$$

Da die Summe der einzelnen Vektoren 0 ist, und immer ein Vektor am anderen hängt, müssen Ausgangspunkt und Endpunkt übereinstimmen. Daher ist $A = G$.

Der Zusammenhang mit dem Satz von Pappos lässt sich wie folgt herleiten: Die Geraden $A \vee B$, $D \vee E$ und $C \vee F$ schneiden sich aufgrund ihrer Parallelität in einem gemeinsamen Fernpunkt, den wir hier als X bezeichnen wollen. Analog schneiden sich die anderen beiden Tripel von Geraden in den Fernpunkten Y und Z . Die so erhaltenen neun Punkte A bis F und X bis Z bilden mit ihren Kollinearitäten exakt die im Satz von Pappos angegebene Konfiguration. Durch jeden der neun Punkte verlaufen drei Geraden, und auf jeder dieser insgesamt neun Geraden liegen drei Punkte. Die Ferngerade selbst kann bei dieser Betrachtung ignoriert werden.



Konfiguration mit Fernpunkten eingezeichnet



Satz von Pappos in seiner typischen Darstellung

Sind alle Inzidenzen im Satz von Pappos bis auf eine erfüllt, so ergibt sich diese letzte Inzidenz zwangsläufig als Schlussfolgerung. In diesem konkreten Fall sind durch die Konstruktion alle Inzidenzen erfüllt, bis auf diejenige, die sicherstellt, dass die Gerade $F \vee Z$ wieder durch den Punkt A verläuft. Diese ergibt sich dann als Folgerung aus dem Satz von Pappos.