TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

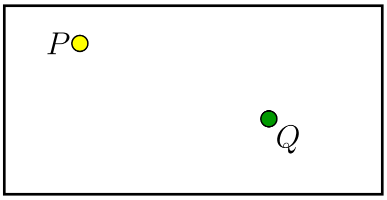
Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Geometriekalküle WS 2010/11
Lösungen zu Aufgabenblatt 2 (3. November 2010)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 7. Billard.

Auf einem rechteckigen Billard-Tisch liegen zwei Kugeln. Eine von diesen soll so angespielt werden, dass sie die andere trifft.



a) Zeichnen Sie in die obige Abbildung (oder noch besser eine Kopie auf eigenem Karopapier) die Bahn ein, auf der die Kugel P zuerst die obere Bande, dann die rechte Bande und schließlich die Kugel Q trifft. Sie können davon ausgehen, dass die Kugeln punktförmig sind und an den Banden einfach reflektiert werden, ohne Dralleffekte oder dergleichen.

b) Jetzt werden die Banden durch Teleporter ersetzt, die gegenüberliegende Kanten so identifizieren, dass die Topologie eines Torus entsteht. Zeichnen Sie eine Bahn ein, bei der die Kugel P zweimal die lange und einmal die kurze Kante kreuzt, bevor sie auf die Kugel Q trifft.

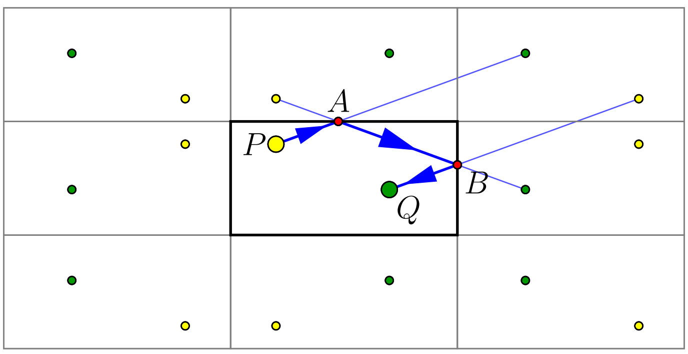
c) Eine Umpolung einzelner Teleporter identifiziert gegenüberliegende Kanten so, dass die Topologie der reellen projektiven Ebene entsteht. Finden Sie auch hier einen Bahnverlauf, der zweimal die lange und einmal die kurze Kante kreuzt.

Lösung:

Grundidee aller Lösungen ist es, benachbarte „Kopien“ oder „Bilder“ des Tisches einzuzeichnen, und dann über mehrere dieser Kopien gerade Linien zu zeichnen.

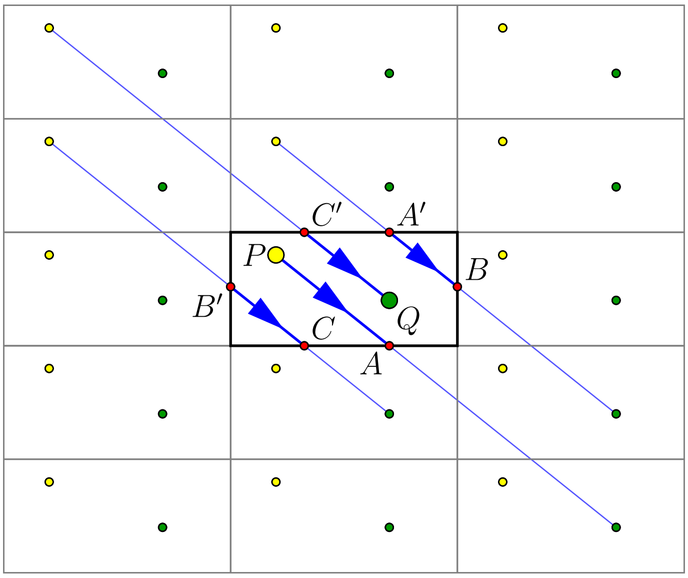
a) Bei einem normalen Billard-Tisch finden an den Banden Reflexionen statt. Betrachtet man eine einfache Reflexion, etwa in einem Spiegel, so verläuft eine Bahn im ersten Abschnitt geradlinig von ihrem Startpunkt in Richtung Spiegelbild des Ziels. Ab dem Schnitt dieser Gerade mit dem Spiegel verläuft sie aus Richtung des Bildes des Startpunkts hin zum tatsächlichen Ziel.

Diesen Ansatz verallgemeinernd betrachtet man mindestens drei angrenzende Bilder, die jeweils durch Spiegelung an einer Tischkante auseinander hervorgehen. Dadurch lässt sich der Bahnverlauf über die einzelnen Spiegelungen hinweg verfolgen.



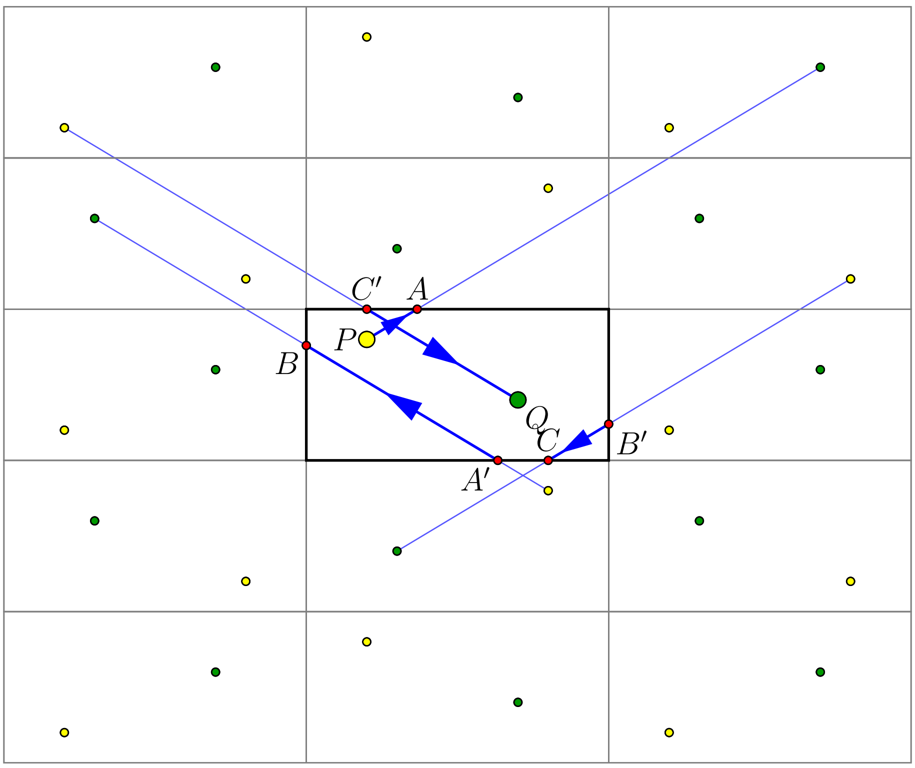
b) Bei einem Torus werden gegenüberliegende Kanten in jeweils gleicher Orientierung miteinander identifiziert. Die umliegenden Nachbarn sind in diesem Fall also keine Spiegelungen mehr, sondern einfach verschobene Kopien. Manch einen mag dies an das Uralt-Computerspiel „Asteroids" erinnern.

Um die geforderten Kantenüberquerungen zu erhalten, müssen Start und Ziel durch zwei lange und eine kurze Kante getrennt sein. Für diese Wahl gibt es vier Möglichkeiten, die allesamt korrekt sind.



c) Bei der projektiven Ebene sind gegenüberliegende Kanten mit gegensinniger Orientierung identifiziert. Ein Ball, der die obere Kante schräg nach rechts laufend passiert, taucht auf der unteren Kante nach links laufend wieder auf.

Die umliegenden Nachbarn ergeben sich hier durch Gleitspiegelungen: eine Spiegelung, die die Orientierung der Kante umkehrt, kombiniert mit einer Verschiebung, die die gegenüberliegenden Kanten identifiziert.



Aufgabe 8. Determinanten.

a) Beweisen Sie folgende Gleichung:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Abgekürzt werden wir dies auch schreiben als $\det(a,b,c) = \langle a \times b, c\rangle$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}^3$.

b) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um folgenden Satz zu beweisen:

Drei Punkte a,b,c liegen genau dann auf einer Geraden, wenn ihre homogenen Koordinaten die Gleichung $\det(a,b,c) = 0$ erfüllen.

c) Formulieren Sie einen entsprechenden Satz, der eine Aussage über drei Geraden macht, deren Determinante verschwindet.

<u>LÖSUNG:</u>

a) Die Gleichung lässt sich am einfachsten durch Entwicklung der Determinante nach der letzten Spalte beweisen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

b) Die Verbindungsgerade von a und b ist $a \times b$. Der Punkt c liegt genau dann auf dieser Geraden, wenn das Skalarprodukt mit ihr 0 ist, also $\langle a \times b, c\rangle = \det(a,b,c) = 0$ gilt.

Der Sonderfall $a = b$, wo die Verbindungsgerade nicht existiert und das Kreuzprodukt den Nullvektor ergibt, passt auch ins Bild: In diesem Fall gibt es nur zwei unterschiedliche Punkte, und zwei Punkte liegen immer auf einer Geraden. Skalarprodukt mit dem Nullvektor sowie Determinante mit zwei linear abhängigen Spalten ergibt jeweils 0.

c) *Drei Geraden a,b,c treffen sich genau dann in einem Punkt, wenn ihre homogenen Koordinaten die Gleichung $\det(a,b,c) = 0$ erfüllen.*

Aufgabe 9. Fixgeraden und -punkte

a) Gegeben sei folgende affine Abbildung in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Fixpunkte und Fixgeraden dieser Abbildung in $\mathbb{R}^2$.

b) Ein Repräsentant der entsprechenden projektiven Transformation lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 15 & 12 & 0 \\ 3 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Fixpunkte dieser Abbildung in $\mathbb{RP}^2$. Gehen Sie dazu von der Matrix aus, nicht von der Lösung der vorherigen Teilaufgabe.

c) Bestimmen Sie die Fixpunkte der folgenden Abbildung in $\mathbb{RP}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

LÖSUNG:

a) **Fixpunkte:** Um Fixpunkte zu bestimmen, ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Determinante der rechten Matrix von 0 verschieden ist, hat dieses Gleichungssystem nur eine einzige Lösung. Da die rechte Seite der Nullvektor ist, ist die Lösung ebenfalls der Nullvektor. Daher ist der Ursprung der einzige Fixpunkt der Abbildung.

Fixgeraden durch den Ursprung: Eine Fixgerade, die durch den Ursprung verläuft, muss in einem Eigenraum der Abbildung liegen. Dadurch wird jeder Punkt der Geraden auf ein Vielfaches seiner selbst abgebildet, was wieder auf der Geraden liegt. Mit den aus der linearen Algebra bekannten Mitteln findet man zwei Eigenwerte mit passenden eindimensionalen Eigenräumen.

$$P_M = (5-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 10\lambda + 21 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-84}}{2} = 5 \pm 2$$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3 \\ \ker\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\ v_1 &= \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda_2 &= 7 \\ \ker\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} &= \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \\ v_2 &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gibt also zwei Ursprungsgeraden, die die gefundenen Eigenvektoren als Richtungsvektoren haben und unter der Abbildung fix bleiben. Diese kann man auch in Normalenform angeben:

$$\begin{aligned} n_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ g_1 &: x + 2y = 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} n_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ g_2 &: x - 2y = 0 \end{aligned}$$

Andere Fixgeraden*: Eine allgemeine Gerade kann beschrieben werden durch Aufpunkt a und Richtungsvektor v als $\{a + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Wenn die Gerade eine Fixgerade ist, dann ist auch der abgebildete Punkt wieder ein Punkt der Gerade. Kürzt man die Abbildungsmatrix als M ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \exists \mu \in \mathbb{R} : M(a + \lambda v) &= a + \mu v \\ Ma + \lambda M v &= a + \mu v \end{aligned}$$

Für $\lambda \neq 0$ kann man durch λ teilen.

$$\frac{1}{\lambda} Ma + Mv = \frac{1}{\lambda} a + \frac{\mu}{\lambda} v$$

Im Grenzfall $\lim_{\lambda \to \infty}$ ergibt sich

$$Mv = \frac{\mu}{\lambda} v$$

Der Richtungsvektor jeder möglichen Fixgeraden muss also ein Eigenvektor der Matrix sein. Als Folge davon muss jede mögliche Fixgerade parallel zu einer Fixgeraden durch den Ursprung verlaufen.

Jetzt gilt es, mögliche Aufpunkte solcher Fixgeraden zu bestimmen. Eine Parallele zu g_1 ist definiert durch $x + 2y = c$ für ein bestimmtes c, das diese Parallele innerhalb der Schar aller Parallelen eindeutig beschreibt. Das c muss also für den Aufpunkt und für sein Bild identisch sein:

$$\begin{aligned} \langle n_1, Ma \rangle &= \langle n_1, a \rangle \\ (5x + 4y) + 2(x + 5y) &= x + 2y \\ 6x + 12y &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

Alle möglichen Aufpunkte a einer Paralellen zu g_1, die unter der Abbildung fix bleibt, liegen also auf g_1 selbst. Daher gibt es keine weiteren parallelen Fixgeraden. Die Rechnung für Paralellen zu g_2 läuft analog:

$$\begin{aligned}\langle n_2, Ma\rangle &= \langle n_2, a\rangle \\ (5x+4y)-2(x+5y) &= x-2y \\ 2x-4y &= 0 \\ x-2y &= 0\end{aligned}$$

Auch hier liegen alle möglichen Aufpunkte auf der Ursprungsgerade. Zusammengefasst ist dadurch also bewiesen, dass es außer den zwei Fixgeraden durch den Ursprung keine weiteren Fixgeraden dieser Abbildung gibt.

b) Ein Fixpunkt p in $\mathbb{RP}^2$ ist ein Punkt, dessen homogene Koordinaten nach Anwendung der Abbildung in der gleichen Äquivalenzklasse liegen, also ein skalares Vielfaches der ursprünglichen homogenen Koordinaten sind: $Mp = \lambda p$. Daher ist jeder Eigenvektor ein Repräsentant eines Fixpunktes.

Man muss also wieder die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix bestimmen, und erhält dadurch drei Eigenvektoren:

$$M_P = (3-x)((15-x)^2-36) = (3-x)(x^2-30x+189) \qquad \lambda_{2,3} = \frac{30 \pm \sqrt{900-756}}{2} = 15 \pm 6$$

$$\lambda_1 = 3 \qquad \ker\begin{pmatrix}12 & 12 & 0\\ 3 & 12 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad v_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 9 \qquad \ker\begin{pmatrix}6 & 12 & 0\\ 3 & 6 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 21 \qquad \ker\begin{pmatrix}-6 & 12 & 0\\ 3 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -18\end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad v_3 = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$$

Es gibt also drei Fixpunkte, von denen einer im Ursprung der Zeichenebene liegt, und zwei die Fernpunkte zu den Fixgeraden der vorherigen Teilaufgabe sind.

c) Auch hier entsprechen die Fixpunkte den Eigenvektoren der Matrix.

$$M_P = \begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & -1\\ 2 & 2-\lambda & -1\\ -2 & 1 & -\lambda\end{vmatrix} = -x^3+3x^2+x-3$$

Hier sieht man nicht so leicht einen der Faktoren des charakteristischen Polynoms, wie das bei der vorherigen Teilaufgabe der Fall war. Man kann jedoch durch Ausprobieren recht leicht beispielsweise $\lambda_1 = 1$ als Nullstelle raten.

$$\begin{array}{l} -\lambda^3+3\lambda^2+\lambda-3 = (\lambda-1)(-\lambda^2+2\lambda+3) \\ \underline{-(-\lambda^3+\lambda^2)} \\ \quad 2\lambda^2+\lambda \\ \quad \underline{-(2\lambda^2-2\lambda)} \\ \qquad 3\lambda-3 \\ \qquad \underline{-(3\lambda-3)} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

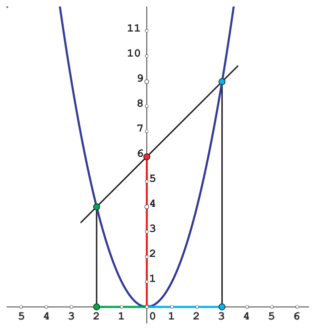
$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = 1 \pm 2$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \ker\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \qquad v_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1 \qquad \ker\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 3 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\} \qquad v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 3 \qquad \ker\begin{pmatrix}-2 & 1 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ -2 & 1 & -3\end{pmatrix} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\} \qquad v_3 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 10. Parabelrechner.



In der Mathematikausstellung ix-quadrat findet sich das rechts abgebildete Exponat. Die Kurve ist eine gewöhnliche Standardparabel mit der Gleichung $y = x^2$.

Will man zwei Zahlen a und b miteinander multiplizieren, so verbindet man die Punkte der Normalparabel bei $x = -a$ und $x = b$ miteinander. Schneidet man diese Gerade mit der y-Achse, so landet man genau im Punkt $(0, a \cdot b)^T$.

Beweisen Sie diese Eingenschaft mit Hilfe von homogenen Koordinaten und dem Kreuzprodukt.

<u>Lösung:</u>

Wie aus Aufgabe 4 von Blatt 1 bekannt, hat die y-Achse die homogenen Koordinaten $(1,0,0)^T$. Damit kann man den Schnittpunkt einfach berechnen:

$$\left(\begin{pmatrix}-a\\a^2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b\\b^2\\1\end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a^2-b^2\\a+b\\-ab^2-a^2b\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-ab^2-a^2b\\-(a+b)\end{pmatrix} = -(a+b)\begin{pmatrix}0\\ab\\1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 11. Matrizen euklidischer Abbildungen.

Bestimmen Sie Matrizen aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$, die die folgenden Transformationen auf homogenen Koordinaten beschreiben.

a) Eine Spiegelung an der Geraden $x = 3$.

b) Eine Drehung um 180° um den Ursprung.

c) Eine Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt $(4,7)^T$.

d) Eine Drehung um den Ursprung, die den Punkt $(9,12)^T$ auf die x-Achse abbildet.

e) Eine Spiegelung an der Geraden durch die Punkte $(2,-4)^T$ und $(-6,2)^T$.

<u>Lösung:</u>

Alle Operationen werden als Verkettungen von primitiven affinen Abbildungen dargestellt. Die Verkettungen stellen sich jeweils als Produkt mehrerer Matrizen dar. Dabei ist immer die rechteste Matrix diejenige Abbildung, die zuerst auf den Punkt angewandt wird.

Warum die Reihenfolge so sein muss, sieht man schnell, wenn man sich die Anwendung der Transformation als Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor vorstellt: $(M_3 \cdot M_2 \cdot M_1) \cdot p = M_3 \cdot (M_2 \cdot (M_1 \cdot p))$. Die rechteste Matrix wird zuerst mit dem Vektor multipliziert.

a) Verkettung von einer Verschiebung, einer Spiegelung an der y-Achse und der inversen Verschiebung.

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0&6\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

b) Man kann hier entweder die kanonische Drehmatrix verwenden, oder sich direkt überlegen, dass eine Drehung um 180° eine Punktspiegelung und somit eine Streckung um den Faktor -1 ist.

$$\begin{pmatrix}\cos\pi & -\sin\pi & 0\\ \sin\pi & \cos\pi & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

c) Verschiebung des Drehzentrums in den Ursprung, dann die Drehung, und dann die inverse Verschiebung.

$$\begin{pmatrix}1&0&4\\0&1&7\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-4\\0&1&-7\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&11\\1&0&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

d) Das Steigungsdreieck des Punktes hat Katheten, die sich direkt aus den Koordinaten ablesen lassen, und eine Hypothenuse von $\sqrt{9^2+12^2}=15$. Sei φ der Winkel der gesuchten Drehung, die den Punkt auf die x-Achse abbildet, so finden sich Sinus und Kosinus des negativen Winkels aus den Längen des Dreiecks: $\sin(-\varphi)=\frac{12}{15}$ und $\cos(-\varphi)=\frac{9}{15}$. Damit kann man die Drehung beschreiben:

$$\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{15}&\frac{12}{15}&0\\-\frac{12}{15}&\frac{9}{15}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}9&12&0\\-12&9&0\\0&0&15\end{pmatrix}$$

e) Hier kann man eine Translation, die einen der Punkte in den Ursprung verschiebt, kombinieren mit einer Drehung, die den anderen Punkt auf eine der Koordinatenachsen dreht, und einer Spiegelung an dieser Achse. Drehung und Verschiebung müssen anschließend noch rückgängig gemacht werden. Verschiebt man den ersten Punkt in den Ursprung, so landet der zweite auf $(-8,6)^T$. Die Drehung auf die x-Achse kann man dann wie in der vorangegangenen Teilaufgabe bestimmen.

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8&-6&0\\6&-8&0\\0&0&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8&6&0\\-6&-8&0\\0&0&10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28&-96&-240\\-96&-28&-320\\0&0&100\end{pmatrix}$$

Aufgabe 12. Affine Abbildung durch drei Punkte.

Bestimmen Sie eine Matrix für die affinen Abbildung, die durch die folgenden drei Paare von Urbild und Bild in $\mathbb{RP}^2$ gegeben ist.

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-6\\2\\1\end{pmatrix}$$

<u>Lösung:</u>

Eine affine Transformation hat die folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Dies ist bereits die Form, die eine 1 in der rechten unteren Ecke hat, und daher Punkte von der Zeichenebene z^1 wieder auf solche abbildet. Daher braucht die Lösung nirgendwo besonders auf skalare Vielfache eingehen, sondern kann direkt ein Gleichungssystem mit sechs Unbekannten lösen:

$$\begin{pmatrix}1&3&1&0&0&0\\0&0&0&1&3&1\\3&3&1&0&0&0\\0&0&0&3&3&1\\-3&-1&1&0&0&0\\0&0&0&-3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\\-1\\-6\\2\end{pmatrix}$$

Einfacher ist es jedoch, zwei unabhängige Gleichungssysteme für die x-Koordinaten und die y-Koordinaten der Bildpunkte aufzustellen:

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\3&3&1\\-3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\-6\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&3&1\\3&3&1\\-3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Da die Matrizen identisch sind, kann man sie noch geschickter zu einem einzigen Gleichungssystem mit einer zweispaltigen Lösungsmatrix zusammenfassen:

$$\begin{array}{rl} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} - 3\mathrm{I} \\ \mathrm{III} + 3\mathrm{I} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{r} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ 4\mathrm{II} + 3\mathrm{III} \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 5 \\ -10 & 8 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Damit ist die gesuchte affine Abbildung bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmt. Man kann ein geeignetes Vielfaches wählen, um die Matrix ohne Brüche zu schreiben.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Um eventuelle Rechenfehler auszuschließen, kann man die so erhaltene Matrix zur Probe auf die in der Angabe vorgegebenen Vektoren anwenden. Dabei kommt ein skalares Vielfaches des in der Angabe vorgegebenen Bildes heraus, was ja in $\mathbb{RP}^2$ der gleiche Punkt ist.