TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

PROF. DR. DR. JÜRGEN RICHTER-GEBERT, MARTIN VON GAGERN

Geometriekalküle WS 2010/11

Lösungen zu Aufgabenblatt 1 (20. Oktober 2010)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 1. Dualität.

Gegeben seien die folgenden drei Axiome.

(i) *Zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.*

(ii) *Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.*

(iii) *Es gibt vier paarweise verschiedene Punkte A, B, C, D, so dass keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen.*

Zeigen Sie, dass wenn die drei Axiome vorausgesetzt werden, der folgende Satz gilt:

Es gibt vier paarweise verschiedene Geraden a, b, c, d, so dass sich keine drei von ihnen in einem Punkt schneiden.

LÖSUNG:

In diesem Beweis seien A, B, C, D die vier Punkte aus Axiom (iii). Das Symbol $\vee$ stellt die Operation „join“, also die Verbindungsgerade zweier Punkte dar, das Symbol $\wedge$ entsprechend die Operation „meet“, also den Schnittpunkt zweier Geraden.

Behauptung: die folgenden vier Geraden erfüllen die im Satz angegebenen Bedingungen.

$$\begin{aligned} a &= A \vee B \\ b &= B \vee C \\ c &= C \vee D \\ d &= D \vee A \end{aligned}$$

Beweis:

Existenz: Nach Axiom (ii) existieren die angegebenen Geraden, und sind eindeutig festgelegt.

Paarweise verschieden: Angenommen, zwei Geraden seien identisch. Dann folgt daraus sofort, dass mindestens drei der Punkte A, B, C, D auf dieser Geraden liegen müssten. Das ist ein Widerspruch zu Axiom (iii). Also sind die Geraden paarweise verschieden.

Keine drei schneiden sich in einem Punkt: Angenommen, dass drei der Geraden durch einen Punkt gehen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien dies die Geraden a, b und c. Die Geraden a und b haben nach ihrer Definition den Punkt B gemeinsam, und nach Axiom (i) keine weiteren gemeinsamen Punkte. Analog haben b und c genau Punkt C gemeinsam. Da B und C nach Axiom (iii) verschieden sind, gibt es keinen gemeinsamen Punkt, durch den alle drei Geraden verlaufen.

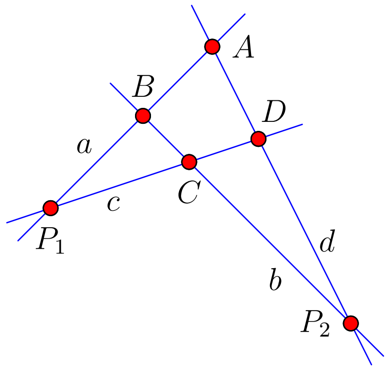
Keine drei schneiden sich in einem Punkt (Alternative): *Statt sich o.B.d.A. auf drei Geraden zu konzentrieren, kann man auch systematisch alle Schnittpunkte untersuchen.*

Wir bestimmen zunächst alle sechs Schnittpunkte $a \wedge b$, $a \wedge c$, $a \wedge d$, $b \wedge c$, $b \wedge d$ und $c \wedge d$ dieser vier Geraden.

$$a \wedge b = (A \vee B) \wedge (B \vee C) = B$$

wegen B auf a und B auf b (nach Definition) und Schnittpunkt eindeutig nach Axiom (i). Mit analogem Argument gilt

$$a \wedge d = (A \vee B) \wedge (D \vee A) = A$$
$$b \wedge c = (B \vee C) \wedge (C \vee D) = C$$
$$c \wedge d = (C \vee D) \wedge (D \vee A) = D$$



Skizze zur Illustration

Die beiden übrigen Schnittpunkte seien mit P_1 und P_2 bezeichnet.

$$a \wedge c = (A \vee B) \wedge (C \vee D) = P_1$$
$$b \wedge d = (B \vee C) \wedge (D \vee A) = P_2$$

Nun ist noch zu zeigen, dass alle diese sechs Schnittpunkte voneinander verschieden sind.

A, B, C, D untereinander verschieden: Die Punkte A, B, C, D sind nach Axiom (iii) voneinander verschieden.

$P_{1,2}$ verschieden von A, B, C, D: Angenommen der Punkt P_1 sei mit einem dieser vier Punkte identisch. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass er mit dem Punkt A identisch sei, also $P_1 = A$. Da P_1 nach Definition auf c liegt, hätte man damit drei Punkte A, C, D auf der Geraden c. Das ist ein Widerspruch zu Axiom (iii).

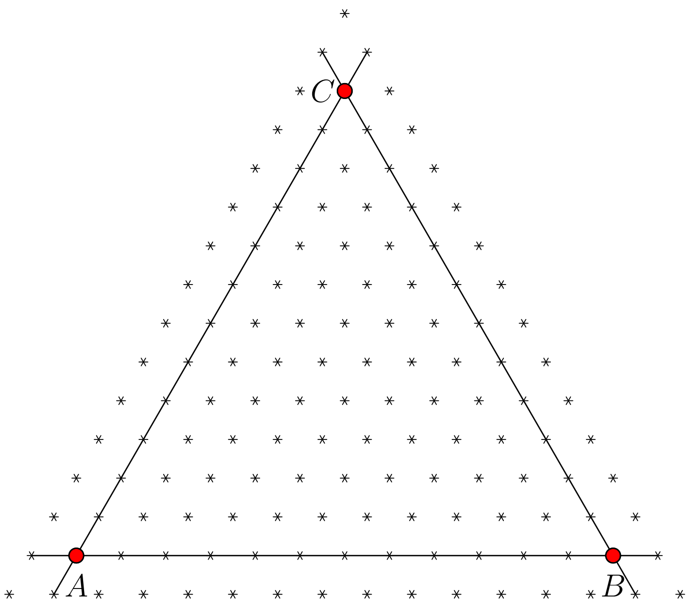
Daher ist der Punkt P_1 mit keinem der vier Punkte A, B, C, D identisch. Ein analoges Argument gilt für P_2.

P_1 verschieden von P_2: Angenommen $P_1 = P_2$. Dann läge dieser Punkt nach Definition von P_1 auf a und gleichzeitig nach Definition von P_2 auf d. Die Verbindungsgerade dieses Punktes mit dem Punkt A wäre nach Axiom (ii) eindeutig. Also müssten die Geraden a und d identisch sein. Dies ist ein Widerspruch zur oben bewiesenen Tatsache, dass die Geraden verschieden voneinander sind. Also muss P_1 verschieden von P_2 sein.

Somit sind alle sechs Schnittpunkte voneinander verschieden. Daher können sich keine drei der vier Geraden in einem Punkt schneiden, da die paarweisen Schnittpunkte dieser drei Geraden verschieden voneinander sind.

Aufgabe 2. Andere Einbettung.

Nun sei die euklidische Ebene im $\mathbb{R}^3$ nicht kanonisch auf $z = 1$ eingebettet, sondern so, dass sie durch die Punkte $A = (1, 0, 0)^T$, $B = (0, 1, 0)^T$ und $C = (0, 0, 1)^T$ des $\mathbb{R}^3$ verläuft. Rechts finden Sie eine Draufsicht auf die eingebettete Ebene.



a) Skizzieren Sie die Lage der Ebene in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.

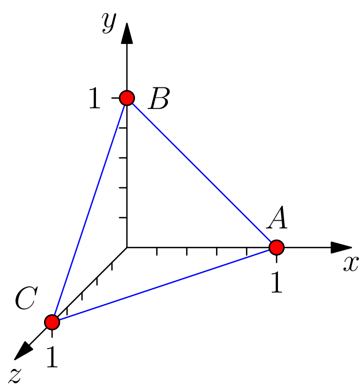
b) Zeichnen Sie die Punkte mit den folgenden homogenen Koordinaten in diese Draufsicht ein:

$$p_1 = (1, 1, 0)^T$$
$$p_2 = (1, 1, 1)^T$$
$$p_3 = (-3, 0, -1)^T$$
$$p_4 = (2, 1, 1)^T$$
$$p_5 = (-1, 6, 7)^T$$

c) Geben Sie die homogenen Koordinaten der Ferngerade dieser Einbettung an.

<u>Lösung:</u>

a) Um die Ebene zu skizzieren, zeichnet man ein dreidimensionales Koordinatensystem und verbindet die drei angegebenen Punkte. Die so erhaltenen Linien kennzeichnen zugleich die Schnitte der eingebetteten Ebene mit den von den Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen, also der (x, y)-Ebene, der (x, z)-Ebene und der (y, z)-Ebene.



b) Die Ebene im $\mathbb{R}^3$ durch die Punkte A, B und C erfüllt die Gleichung $x + y + z = 1$. Um einen Punkt in diese Ebene einzuzeichnen, müssen also seine homogenen Koordinaten so skaliert werden, dass diese Gleichung erfüllt ist. Die sich so ergebenden drei Koordinaten seien mit a, b und c bezeichnet.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + y + z) \begin{pmatrix} \frac{x}{x+y+z} \\ \frac{y}{x+y+z} \\ \frac{z}{x+y+z} \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a &:= \tfrac{x}{x+y+z} \\ b &:= \tfrac{y}{x+y+z} \\ c &:= \tfrac{z}{x+y+z} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Punkte aus der Angabe:

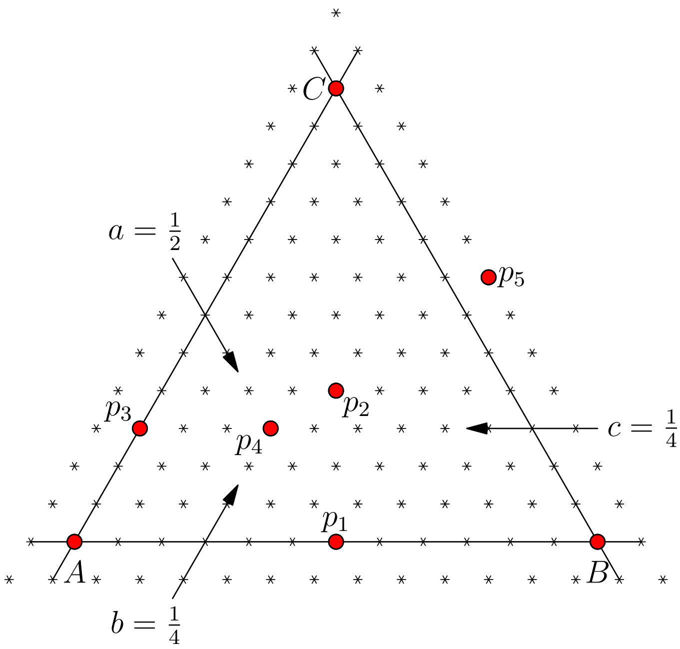
$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$p_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad p_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{7}{12} \end{pmatrix}$$

Die so gefundenen Punkte in der eingebetteten Ebene muss man jetzt noch richtig in die Zeichenebene eintragen. Zum besseren Verständnis unterscheidet diese Erklärung zwischen den dreidimensionalen Einheitsvektoren A, B, C, wie sie in der Angabe vorgegeben sind, und ihren zweidimensionalen Bildern A', B' und C', wie man sie in der Zeichenebene sehen kann.

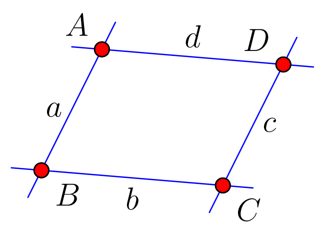
Da die einzelnen Einträge der umgeformten Vektoren sich zu 1 addieren, kann man sie auch als baryzentrische Koordinaten des gesuchten Punktes auffassen. Wenn man die kartesischen Koordinaten der Bilder A', B' und C' in der Ebene $\mathbb{R}^2$ hätte, könnte man die Koordinaten der gewünschten Punkte als $aA' + bB' + cC'$ errechnen.

Will man sich den Umweg über das kartesische Koordinatensystem sparen, kann man auch direkt in Dreieckskoordinaten denken. Dabei stellen alle zu $A'B'$ paralellen Geraden diejenigen Linien dar, die die gleiche c-Koordinate haben. Bei $A'B'$ selbst ist diese Koordinate 0, da sich alle Punkte auf der Geraden $A'B'$ allein als Linearkombination aus A' und B' ergeben. Bei C' ist diese Koordinate 1 und die anderen beiden Koordinaten hingegen 0. Werte zwischen 0 und 1 sind dazwischen auf Parallelen zu $A'B'$ in gleichmäßigen Abständen verteilt. Gleiches gilt für die anderen Koordinaten. In der Skizze ist dieses Verfahren für den Punkt p_4 illustriert.



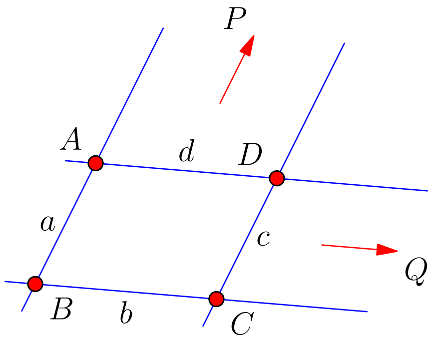
c) Die Ferngerade entspricht dem zweidimensionalen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, der mit der eingebetteten Ebene keine gemeinsamen Punkte hat, also parallel zu dieser Verläuft. Repräsentiert wird dieser Untervektorraum durch seinen Normalenvektor. Das ist in diesem Fall der Vektor $(1, 1, 1)^T$. Die Ferngerade entspricht im Dreidimensionalen also dem durch $x + y + z = 0$ beschriebenen Untervektorraum.

Aufgabe 3. Parallelogramm.



Gegeben seien die homogenen Koordinaten der Punkte A, B und C. Zusammen mit einem vierten Punkt D bilden diese ein Parallelogramm $ABCD$, wobei die Ecke D der Ecke B gegenüber liegt. Geben Sie eine Formel an, mit der die homogenen Koordinaten des Punktes D ausgerechnet werden können.

Lösung:



Homogene Koordinaten von Verbindungsgeraden lassen sich einfach über das Kreuzprodukt der homogenen Koordinaten von zwei Punkten bestimmen. So ist die Gerade a, die A mit B verbindet, wie folgt auszurechnen:

$$a = A \times B$$

Parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen. Der zugehörige Fernpunkt lässt sich als Schnitt einer Geraden mit der Geraden im Unendlichen ermitteln. Für die Gerade a sei dies der Punkt P:

$$P = a \times l_\infty$$

Die Gerade c durch C und parallel zu a ist jetzt gegeben als Verbindungsgerade dieses Fernpunktes P mit dem Punkt C:

$$c = P \times C$$

Die Verbindungsgerade b von B und C, ihr Fernpunkt Q sowie die Parallele d durch A sind analog zu bestimmen:

$$\begin{aligned} b &= B \times C \\ Q &= b \times l_\infty \\ d &= Q \times A \end{aligned}$$

Damit ergibt sich D als Schnitt zweier Geraden:

$$D = c \times d$$

Das führt abschließend zu folgender Formel:

$$\begin{aligned} D &= (((A \times B) \times l_\infty) \times C) \times (((B \times C) \times l_\infty) \times A) \\ &= \left(\left((A \times B) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \times C\right) \times \left(\left((B \times C) \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \times A\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Koordinatenachsen.

Bestimmen Sie homogene Koordinaten für die x- und y-Achse sowie den Koordinatenursprung der Zeichenebene. Verwenden Sie die Standardeinbettung mit $z = 1$.

Lösung:

Der Koordinatenursprung hat die zweidimensionalen Koordinaten $(0, 0)^T$ und somit die homogenen Koordinaten $(0, 0, 1)^T$ (oder ein vielfaches davon).

Die x-Achse erfüllt die Gleichung $y = 0$ oder ausführlicher $0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 = 0$. Sie hat daher die homogenen Koordinaten $(0, 1, 0)^T$. Analog hat die y-Achse die homogenen Koordinaten $(1, 0, 0)^T$.

Aufgabe 5. Homogene Koordinaten.

Zeichnen Sie die folgenden Objekte in die rechts abgebildete gewöhnlichen (x, y)-Ebene (eingebettet in den $\mathbb{R}^3$ auf $z = 1$) ein.

a) Punkte mit homogenen Koordinaten:

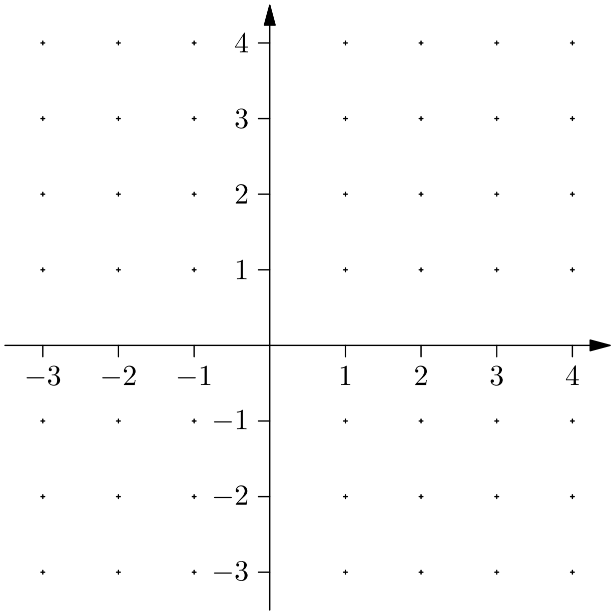
$$p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Geraden mit homogenen Koordinaten:

$$l_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad l_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad l_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$l_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad l_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad l_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Lösung:

a) Um die Punkte in die Ebene einzeichnen zu können, müssen sie dehomogenisiert werden. Dazu werden ihre homogenen Koordinaten wie folgt umgeformt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Im Einzelnen ergeben sich so:

$$p_1 = 1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_3 = -2 \begin{pmatrix} 3\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Anschließend kann die dritte Koordinate weggelassen werden.

Der Punkt p_4 befindet sich im Unendlichen und ist daher nicht direkt einzuzeichnen. Obiger Ansatz hätte eine Division durch Null zur Folge. Lediglich die Richtung, in die er liegt, kann man durch einen Pfeil andeuten.

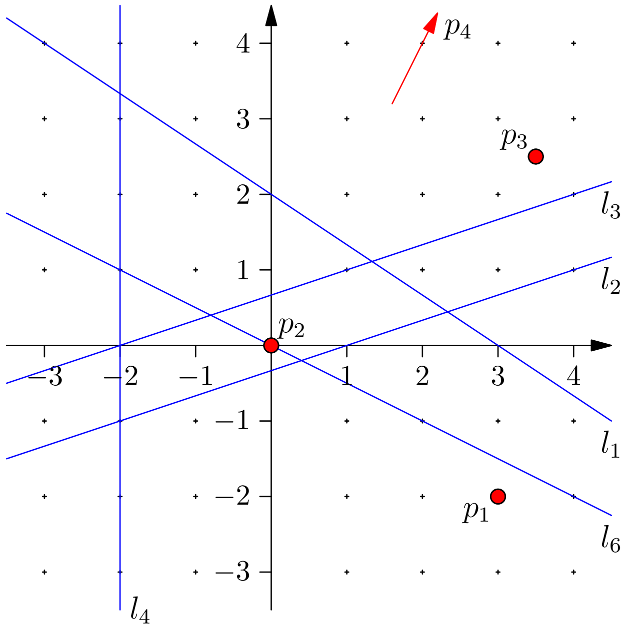
b) Um die Geraden in $\mathbb{R}^2$ zu bestimmen, gibt es verschiedene Ansätze. Man kann etwa für Vektoren (a, b, c) die zugehörige Gleichung $ax + by + c = 0$ aufstellen und durch „scharf hinschauen" zwei Punkte finden, die diese Gleichung erfüllen und somit die Gerade definieren. So sieht man etwa, dass l_2 die Gleichungen $-2 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 2 = 0$ sowie $-2 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 2 = 0$ erfüllt und daher die Verbindungsgerade von $(1, 0)^T$ mit $(4, 1)^T$ sein muss.

Alternativ kann man die Gerade auch durch Kreuzprodukte mit zwei beliebigen anderen, nicht parallelen Geraden schneiden, um so zwei Punkte auf der Geraden zu erhalten. Schneidet man etwa die Gerade l_1 mit der x- und der y-Achse, so erhält man:

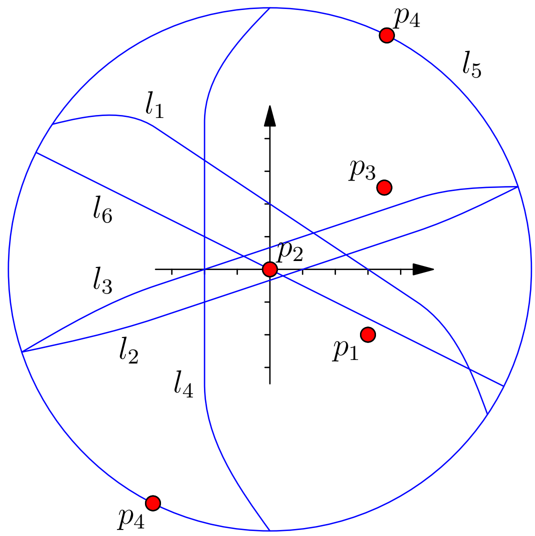
$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Gerade ergibt sich wieder als Verbindung dieser Punkte.

Die Gerade l_5 ist die Gerade im Unendlichen. Sie lässt sich nicht korrekt in die Skizze einzeichnen. Will man sie dennoch veranschaulichen, kann man die Skizze verbiegen, um das Unendliche auch noch drauf zu quetschen.



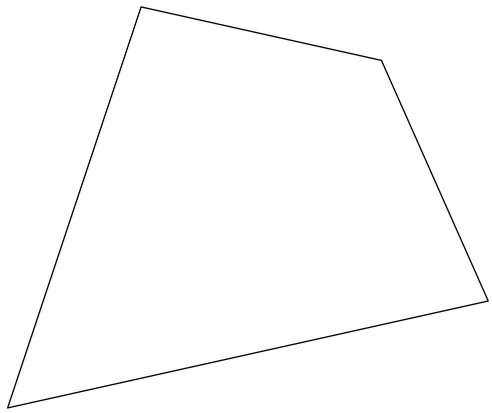
Skizze als Lösung der Aufgabe



Verbogene Skizze mit Unendlichkeit
zur besseren Vorstellung

Aufgabe 6. Projektives Konstruieren.

Gegeben sei die folgende (unvollständige) Photographie vom Umriss eines Schachbretts. Zeichnen Sie die Felder des Schachbretts *perspektivisch richtig* ein. Benutzen Sie dazu die Tatsache, dass eine solche (Zentral-)Projektion Kollinearitäten erhält: Punkte, die in der Ebene des Schachbretts auf einer Gerade liegen, liegen auch auf dieser Abbildung auf einer Geraden.



<u>Lösung:</u>

Zur Lösung dieser Aufgabe muss man sich nur auf die grundlegenden Eigenschaften projektiver Geometrie besinnen:

- Projektive Transformationen bilden Geraden auf Geraden ab.
- Schnittpunkte von Geraden bleiben unter projektiven Transformationen erhalten.
- Euklidisch parallele Geraden schneiden sich im Unendlichen.

Sich gegenüberliegende Seiten des Schachbretts sind natürlich parallel. Ihre jeweiligen Schnittpunkte im Unendlichen werden unter der gewählten Perspektive (die praktisch eine projektive Transformation darstellt) sichtbar. Die so bestimmten Schnittpunkte werden im untenstehenden Bild mit A und B bezeichnet.

Da der Schnitt von Geraden erhalten bleibt, lässt sich durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen der perspektivisch richtige Mittelpunkt M des Schachbretts bestimmen.

Die Gerade durch MA bzw. MB teilen dann das Schachbrett perspektivisch richtig in obere und untere bzw. rechte und linke Spielbretthälfte ein, da sie Linien entsprechen, die parallel zum Rand verlaufen. Wiederholte Anwendung dieses Verfahrens bringt weitere Unterteilungen und somit schließlich das perspektivisch richtig gezeichnete Schachbrett.