TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Geometriekalküle WS 2010/11
Aufgabenblatt 7 (26. Januar 2011)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 36. Geraden in $\mathbb{RP}^3$.

Die Plücker-Koordinaten einer Gerade durch zwei Punkte a und b im $\mathbb{RP}^3$ mit homogenen Koordinaten $(a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ und $(b_1, b_2, b_3, b_4)^T$ sind der sechsdimensionale Vektor:

$$\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} \vee \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix} = \begin{array}{c}12\\ \\13\\ \\14\\ \\23\\ \\24\\ \\34\end{array}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_4 & b_4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ a_4 & b_4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_3 & b_3\\ a_4 & b_4\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Koordinaten der Gerade bis auf skalares Vielfaches unabhängig von der Wahl der Punkte auf der Geraden sind.

b) Was geschieht, wenn die beiden Punkte zusammenfallen?

Aufgabe 37. Operationen in $\mathbb{RP}^3$.

Die Operationen Join ($\vee$) und Meet ($\wedge$) auf Plücker-Koordinaten haben folgende allgemeine Form:

$$C = A \vee B \qquad\qquad D = A \wedge B$$

$$C_\lambda = \sum_{\substack{(\tau,\mu)\\ \tau \dot\cup \mu = \lambda}} \operatorname{sign}(\tau\mu) \cdot A_\tau \cdot B_\mu \qquad\qquad D_\lambda = \sum_{\substack{(\tau,\mu)\\ \tau \cap \mu = \lambda}} \operatorname{sign}((\tau \setminus \lambda)(\mu \setminus \lambda)) \cdot A_\tau \cdot B_\mu$$

Dabei bezeichnen λ, τ, μ (geordnete) Teilmengen der Indexmenge für homogene Punktkoordinaten, also für den $\mathbb{RP}^3$ der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$.

a) Gegeben seien die beiden Punkte $p = (1, -1, 0)^T$ und $q = (0, 2, 1)^T$ als Elemente aus $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die homogenen Koordinaten dieser Punkte in $\mathbb{RP}^3$.

b) Berechnen Sie die Plücker-Koordinaten der Verbindungsgerade g durch die beiden Punkte p und q.

c) Überprüfen Sie die Richtigkeit der Plücker-Koordinaten der Geraden g mithilfe der Grassmann-Plücker-Relationen (Rang 2).

d) Wiederum in $\mathbb{R}^3$ seien die folgenden Punkte gegeben: $a = (1, 0, 0)^T$, $b = (0, 2, 0)^T$ und $c = (0, 3, 5)^T$. Bestimmen Sie die homogenen Koordinaten der Ebene E, die von diesen drei Punkten aufgespannt wird.

e) Stellen Sie fest, ob der Punkt $d = (1, 5, 1)^T$ in der Ebene E liegt.

f) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene E und geben Sie diesen als Element von $\mathbb{R}^3$ an.

— *Hausaufgaben* —

Aufgabe 38. Querbezüge.

Beschreiben Sie den Zusammenhang und die Unterschiede zwischen folgenden Aufgaben:

a) Blatt 1 Aufgabe 2 und Aufgabe 5.

b) Blatt 1 Aufgabe 6 und Blatt 4 Aufgabe 25.

c) Blatt 3 Aufgabe 15 und Aufgabe 16 c).

d) Blatt 5 Aufgabe 26 a), Blatt 5 Aufgabe 28 d) und Blatt 6 Aufgabe 32 a).

e) Blatt 1 Aufgabe 5 a) p_2, Blatt 2 Aufgabe 7 c) und Blatt 5 Aufgabe 30 a) A_2. Wie sieht ein Billardtisch für $\mathbb{CP}^1$ aus?

Aufgabe 39. Klausurvorbereitung.

Bereiten Sie sich auf die Klausur vor:

a) Lesen Sie sich Ihre Vorlesungsmitschrift und (soweit vorhanden) das zugehörige Buch (noch einmal) durch.

b) Sehen Sie sich alle Aufgaben der Übungsblätter noch einmal an, und bearbeiten Sie diejenigen, deren Lösung ihnen eventuell Probleme bereiten könnte.

c) Lesen Sie die Musterlösungen zu den Übungsaufgaben, und vergleichen Sie die dort angegebenen Lösungen mit ihren eigenen.

d) Erstellen Sie Ihren „Spickzettel“ für die Klausur.