TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Geometriekalküle WS 2010/11
Aufgabenblatt 6 (12. Januar 2011)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 31. Euklidischer Abstand.

Üblicherweise bestimmt man die Entfernung $\|x-y\|$ zweier Punkte $x=(x_1,x_2)^T, y=(y_1,y_2)^T \in \mathbb{R}^2$ über den Satz von Pythagoras. Es gilt nämlich

$$\|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

Im Folgenden soll eine projektive Invariante hergeleitet werden, die den euklidischen Abstand bezüglich der Standardeinbettung in $\mathbb{RP}^2$ wiedergibt. Lösen Sie dafür die folgenden Teilaufgaben:

a) Zeigen Sie, dass $\|x-y\| = \sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}$ ist, wenn $X=(x_1,x_2,1)^T$ und $Y=(y_1,y_2,1)^T$.

b) Zeigen Sie, dass $\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}$ keine projektive Invariante ist.

c) Begründen Sie, dass

$$d := \frac{\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}\;[A,\mathtt{I},\mathtt{J}][B,\mathtt{I},\mathtt{J}]}{\sqrt{[A,B,\mathtt{I}][A,B,\mathtt{J}]}\;[X,\mathtt{I},\mathtt{J}][Y,\mathtt{I},\mathtt{J}]}$$

eine projektive Invariante ist.

d) Interpretieren Sie diesen Term d als Verhältnis von Abständen in $\mathbb{R}^2$.

e) Was muss für A,B gelten, damit d den Abstand $\|x-y\|$ wiedergibt?

Aufgabe 32. Verallgemeinerter Kreismittelpunkt.

Es gibt projektive Transformationen in $\mathbb{C}^{3\times 3}$, die einen gegebenen Kreis so abbilden, dass die Punkte $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ reell und somit sichtbar werden. Zur Einfachheit sei hier eine Situation dargestellt, in der das Bild des Kreises wieder ein Kreis ist.

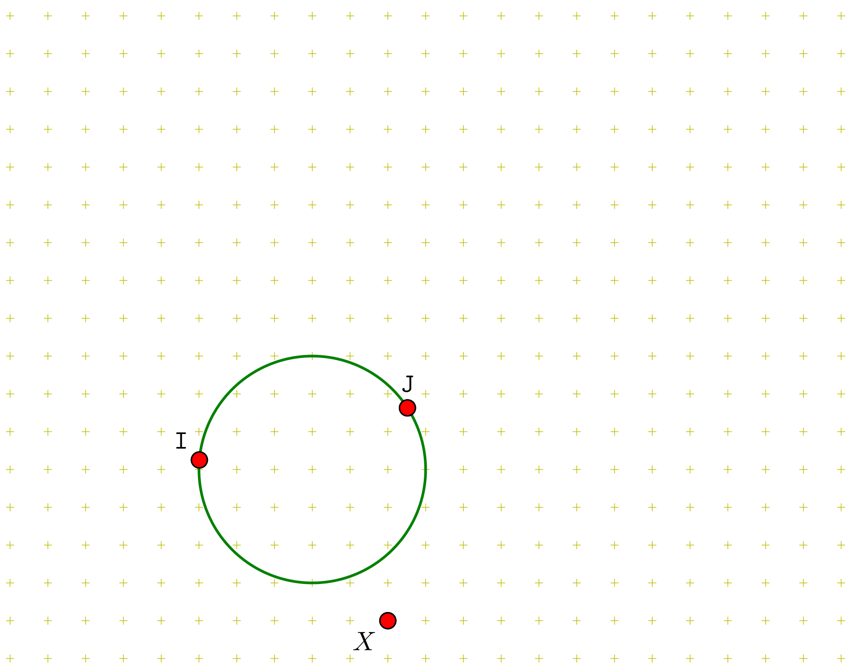
Führen Sie die folgenden Konstruktionsschritte mit möglichst projektiven Mitteln in der transformierten Konfiguration aus. Die Beschreibungen sind dabei für die ursprüngliche Konfiguration und mit euklidischem Vokabular angegeben *(kursiv)* und müssen entsprechend übertragen werden.

a) Konstruieren Sie den *Mittelpunkt* M des Kreises.

b) Zeichnen Sie die Gerade d ein, die durch den *Kreismittelpunkt* M sowie durch den vorgegebenen Punkt X verläuft. Bezeichnen Sie die Schnittpunkte dieses *Durchmessers* mit dem Kreis als A und B.

c) Überprüfen Sie durch eine geeignete Hilfskonstruktion, dass M von A und B *gleich weit entfernt* ist.

d) Überprüfen Sie durch Einzeichnen der passenden Inzidenz, dass die zwei Tangenten an den Kreis in den Punkten A und B *parallel* sind.



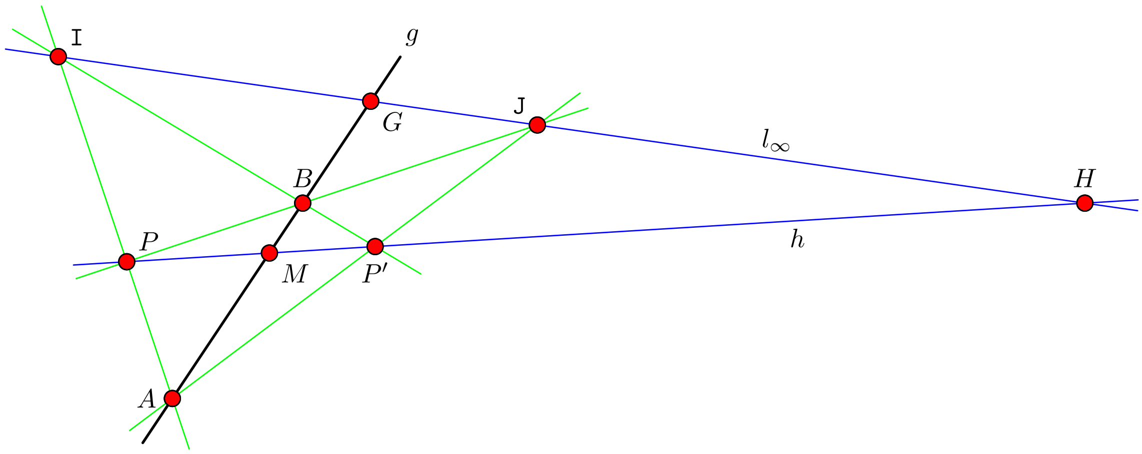
— *Hausaufgaben* —

Aufgabe 33. Abstand Punkt – Gerade.

Gegeben seien die homogenen Koordinaten eines Punktes P und einer Gerade g. Geben Sie eine Vorschrift zur projektiven Berechnung des Abstands von P zu g an. Zerlegen Sie die Vektoren dazu nicht in ihre einzelnen Koordinaten, sondern verwenden Sie statt dessen die folgenden zusätzlichen Vektoren:

$$\mathtt{I} = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathtt{J} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die nachfolgende Skizze kann Ihnen behilflich sein. Sie stellt die Konstruktion des Spiegelpunktes P' von P and g dar und sollte aus der Vorlesung bekannt sein.



Aufgabe 34. Laguerres Formel.

Zeigen Sie mit Hilfe von Laguerres Formel folgende Aussagen:

a) Für die Winkelsumme im Dreieck gilt:
$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \pmod \pi$$

b) Gegenüberliegende Winkel eines Parallelogramms sind (modulo π) gleich groß.

c) Begründen Sie, warum sich mit Laguerres Formel Winkel nur Modulo π bestimmen lassen.

Aufgabe 35. Projektive Invarianz.

Vier Punkte A, B, C, D liegen genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn

$$[CA\mathtt{I}][DB\mathtt{I}][DA\mathtt{J}][CB\mathtt{J}] - [CA\mathtt{J}][DB\mathtt{J}][DA\mathtt{I}][CB\mathtt{I}] = 0$$

Außerdem kann der Abstand zwischen zwei Punkten X, Y bestimmt werden mit Hilfe der Formel

$$d = \frac{\sqrt{[X,Y,\mathtt{I}][X,Y,\mathtt{J}]}\ [A,\mathtt{I},\mathtt{J}][B,\mathtt{I},\mathtt{J}]}{\sqrt{[A,B,\mathtt{I}][A,B,\mathtt{J}]}\ [X,\mathtt{I},\mathtt{J}][Y,\mathtt{I},\mathtt{J}]}$$

Die beiden oben angegebenen Formeln sind projektiv invariant. Auf der anderen Seite ist von perspektivischen Abbildungen hinreichend bekannt, dass diese projektive Abbildungen sind, aber Längen verzerren und Kreise zu Ellipsen verbiegen können. Wie passt das zusammen?