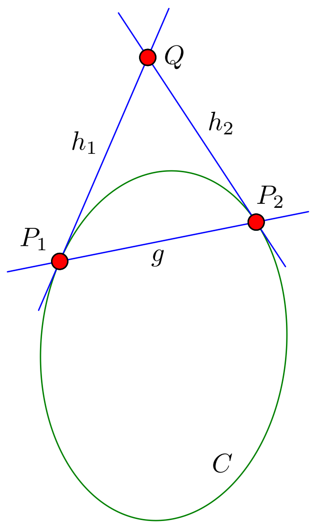
TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Geometriekalküle WS 2010/11
Aufgabenblatt 5 (15. Dezember 2010)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 26. Kegelschnitte und Tangenten.



Gegeben sei ein nicht degenerierter Kegelschnitt C, der durch eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ beschrieben wird:

$$C = \left\{p \in \mathbb{RP}^2 \,\middle|\, p^T \cdot A \cdot p = 0\right\}$$

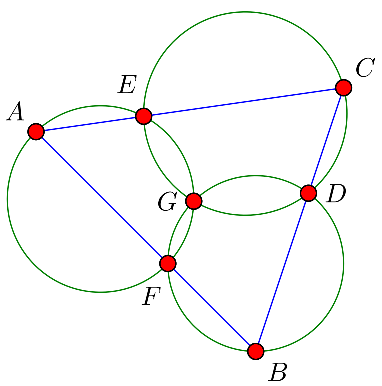
a) Zeigen Sie, dass $h = A \cdot p$ die Tangente an einen Punkt p auf C ist.

b) Finden Sie zu einer Tangente h an C, deren homogene Koordinaten gegeben seien, den Berührpunkt p.

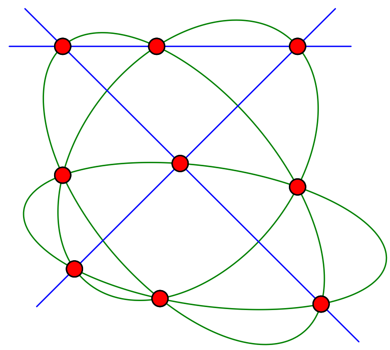
c) Betrachten Sie nebenstehende Konstruktion. Gegeben sei ein Kegelschnitt C und eine Gerade g, die C in zwei Punkten P_1 und P_2 schneidet. Es seien h_1 und h_2 die jeweiligen Tangenten an C in P_1 und P_2. Sie schneiden sich in einem Punkt Q. Geben Sie eine geschlossene Form an, um Q in Abhängigkeit von g zu berechnen.

d) Für die Umkehrung der Konstruktion in Aufgabenteil c) (C und Q gegeben, Tangenten h_1 und h_2 konstruieren, g ist die Verbindungsgerade von P_1 und P_2, den Berührpunkten der Tangenten), was ist g in Abhängigkeit von Q?

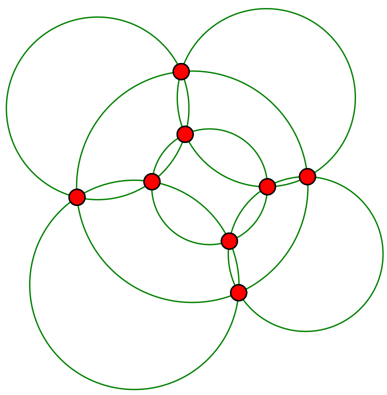
Aufgabe 27. Metamorphosen eines Satzes.



Ausgangssatz



Verallgemeinerung a)



Verallgemeinerung b)

a) Oben auf der linken Seite ist die Zeichnung eines geometrischen Satzes gegeben: Wenn alle eingezeichneten Inzidenzen bis auf eine erfüllt sind, so ist auch diese letzte Inzidenz erfüllt. Wenn Sie diesen Satz so interpretieren, dass die drei Kreise zu Kegelschnitten werden, könnten Sie die mittlere Zeichnung erhalten. Ordnen Sie in dieser Zeichnung den eingezeichneten Punkten sinnvoll die Bezeichnungen der ursprünglichen Zeichnung zu. Geben Sie ebenso den noch verbleibenden Punkten eine geometrisch sinnvolle Interpretation.

b) Betrachten Sie noch einmal die Zeichnung des geometrischen Satzes ganz links. Wenn Sie diesen Satz diesmal so interpretieren, dass die drei Geraden zu Kreisen werden, könnten Sie die rechte Zeichnung erhalten. Ordnen Sie in dieser Zeichnung den eingezeichneten Punkten sinnvoll die Bezeichnungen der ursprünglichen Zeichnung zu. Geben Sie ebenso dem letzten noch verbleibenden Punkt eine geometrisch sinnvolle Interpretation.

c) Verwenden Sie die nebenstehenden neuen Bezeichnungen für die Punkte in der Konstruktion aus Aufgabe b), und beweisen Sie diesen Satz, den sogenannten Satz von Miguel:

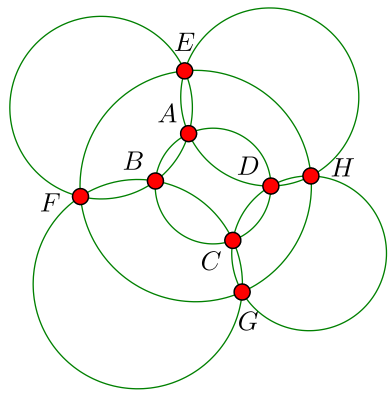
Gegeben seien acht paarweise verschiedene Punkte A bis H. Sind die fünf Punkte-Quadrupel

$$(A, B, C, D) \quad (A, B, E, F) \quad (B, C, F, G) \quad (C, D, G, H) \quad (A, D, E, H)$$

jeweils kozirkular oder kollinear, so ist es auch das Quadrupel

$$(E, F, G, H)$$

Nutzen Sie aus, dass das Doppelverhältnis von vier Punkten in $\mathbb{CP}^1$ genau dann reell ist, wenn die Punkte kollinear oder kozirkular sind.



— ***Hausaufgaben*** —

Aufgabe 28. Kreis als Kegelschnitt, der $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ enthält.

Ein Kreis in der projektiven Ebene ist durch

$$C = \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{RP}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 + \alpha xz + \beta yz + \gamma z^2 = 0;\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\right\}$$

gegeben.

a) Warum (oder wann) ist dies ein Kreis? Wie lautet sein Mittelpunkt?

b) Zeigen Sie, dass die Kreise mit obiger Kreisgleichung die Punkte $\mathtt{I} = (-i, 1, 0)^T$ und $\mathtt{J} = (i, 1, 0)^T$ enthalten.

c) Geben Sie die Matrix $Q \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, die diesen Kreis beschreibt.

d) Zeigen Sie, dass man den Mittelpunkt des Kreises wie folgt ausrechnen kann:

$$M = (Q \cdot \mathtt{I}) \times (Q \cdot \mathtt{J})$$

e) Gibt es Quadriken, die $\mathtt{I}$ und $\mathtt{J}$ enthalten, aber nicht durch eine Gleichung in der oben angegebenen Form beschrieben werden können?

Aufgabe 29. von $\mathbb{CP}^1$ nach $\mathbb{RP}^2$.

Gegeben seien die homogenen Koordinaten eines endlichen Punktes in $\mathbb{CP}^1$:

$$\begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

a) Geben Sie die homogenen Koordinaten des entsprechenden Punktes in $\mathbb{RP}^2$ an. Verwenden Sie dazu nur Additionen, Subtraktionen und Multiplikationen, ausgehend von den vier oben angegebenen reellen Zahlen.

b) Was ist das Ergebnis dieser Abbildung, wenn die Eingabe den unendlich fernen Punkt in $\mathbb{CP}^1$ beschreibt?

Aufgabe 30. Geometrische Objekte in $\mathbb{CP}^1$.

Zeichnen Sie die folgenden geometrischen Objekte in ein Koordinatensystem:

a) Die Punkte $A_1 = \begin{pmatrix} 4+3i \\ 1-2i \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3+i \\ e^{\frac{3}{2}\pi} \end{pmatrix}$ und $A_3 = \begin{pmatrix} 2+4i \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Die Menge $B = \left\{ p \in \mathbb{CP}^1 \,\middle|\, \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 4+2i \end{pmatrix}, p \right\rangle = 0 \right\}$

c) Die Menge $C = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{CP}^1 \,\middle|\, \frac{2-i}{z} \in \mathbb{R} \right\}$