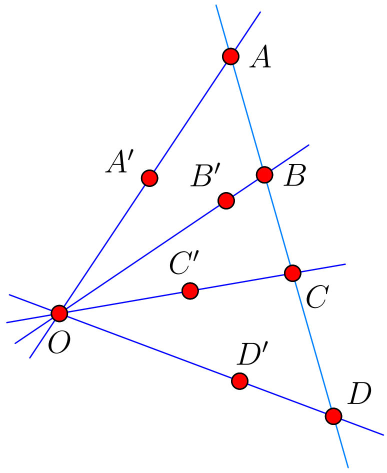
TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Geometriekalküle WS 2010/11
Aufgabenblatt 4 (1. Dezember 2010)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 19. Punkte von O aus gesehen.



Gegeben seien vier paarweise verschiedene Geraden a, b, c, d in $\mathbb{RP}^2$. Alle vier Geraden schneiden sich in einem gemeinsamen Punkt O.

a) Es seien A, B, C, D vier kollineare und von O verschiedene Punkte auf a, b, c, d. Beweisen Sie:

$$(A, B; C, D) = \frac{[O, A, C][O, B, D]}{[O, A, D][O, B, C]}$$

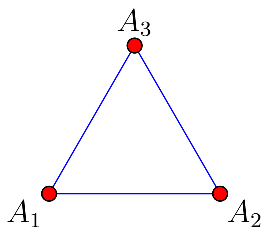
b) Es seien A', B', C', D' vier von O verschiedene Punkte auf a, b, c, d. Beweisen Sie:

$$(a, b; c, d) = \frac{[O, A', C'][O, B', D']}{[O, A', D'][O, B', C']}$$

Aufgabe 20. Harmonische Lage am Dreieck.

Gegeben sei ein (nicht-entartetes) Dreieck mit den Eckpunkten A_1, A_2 und A_3 im $\mathbb{RP}^2$.

a) Wählen Sie drei Punkte B_1, B_2, B_3 auf den drei Dreiecksseiten, so dass B_1 auf der Dreiecksseite A_2A_3, B_2 auf der Dreiecksseite A_1A_3 und B_3 auf der Dreiecksseite A_1A_2 liegt und sich die drei Strecken A_iB_i für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ in einem Punkt schneiden.



b) Bestimmen Sie nun drei weitere Punkte C_1, C_2, C_3 mit folgender Eigenschaft:

Für $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ liege C_i auf der Geraden durch die Punkte A_j und A_k, und die Punkte A_j, A_k, B_i, C_i sind in harmonischer Lage, d.h. $(A_j, A_k; B_i, C_i) = -1$.

c) Zeigen Sie: Die so konstruierten Punkte C_1, C_2 und C_3 sind kollinear.

d) Interpretieren Sie die obige Konstruktion unter der Voraussetzung, dass die Punkte C_1, C_2 und C_3 Fernpunkte sind.

Aufgabe 21. Sechs Punkte auf einem Kegelschnitt.

Es seien fünf Punkte $P_1, \dots, P_5$ im $\mathbb{RP}^2$ gegeben. Sie bestimmen im Allgemeinen einen Kegelschnitt

$$C = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2 + d \cdot xy + e \cdot yz + f \cdot xz = 0\}.$$

Zeigen Sie dass ein Punkt P_6 genau dann auf C liegt, wenn

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & y_1z_1 & x_1z_1 \\ x_2^2 & y_2^2 & z_2^2 & x_2y_2 & y_2z_2 & x_2z_2 \\ x_3^2 & y_3^2 & z_3^2 & x_3y_3 & y_3z_3 & x_3z_3 \\ x_4^2 & y_4^2 & z_4^2 & x_4y_4 & y_4z_4 & x_4z_4 \\ x_5^2 & y_5^2 & z_5^2 & x_5y_5 & y_5z_5 & x_5z_5 \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6y_6 & y_6z_6 & x_6z_6 \end{pmatrix} = 0$$

Hinweis: Im $\mathbb{R}^d$ wird durch $d-1$ Punkte $a_1, \dots, a_{d-1}$ ein $d-1$-dimensionaler Unterraum mit der Formel $\langle h, a\rangle = 0$ aufgespannt. Ein Punkt a liegt also genau dann in diesem Unterraum, wenn $\langle h, a\rangle = 0$, aber auch genau dann, wenn $\det(a_1, \dots, a_{d-1}, a) = 0$.

— *Hausaufgaben* —

Aufgabe 22. Doppelverhältnisse permutiert.

a) Für vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 sei das Doppelverhältnis $(P_1, P_2; P_3, P_4) = \lambda$. Berechnen Sie für alle Permutationen $\pi \in S_n$ das Doppelverhältnis $(P_{\pi(1)}, P_{\pi(2)}; P_{\pi(3)}, P_{\pi(4)})$.

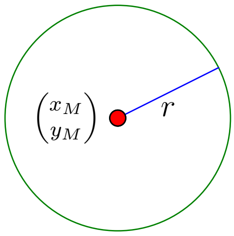
b) Gegeben seien drei Punkte auf einer Geraden im $\mathbb{RP}^2$. Konstruieren Sie einen vierten Punkt, so dass alle vier Punkte in harmonischer Lage sind.

Wie viele Möglichkeiten haben Sie, diesen vierten Punkt zu konstruieren?

Aufgabe 23. Plückers μ.

Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die auf einem gemeinsamen Definitionsbereich D definiert sind, und $P \in D$ ein beliebiges Element dieses Definitionsbereichs. Geben Sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ an, so dass die Linearkombination $\lambda f + \mu g$ der Funktionen an der Position P eine Nullstelle hat, und $(\lambda, \mu)^T \neq (0, 0)^T$.

Aufgabe 24. Kreis als Quadrik.



Berechnen Sie die symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$, die einen Kreis mit Mittelpunkt $(x_M, y_M)^T$ und Radius r als Quadrik beschreibt.

Aufgabe 25. Projektive Skalen.

Gegeben sei die folgende (unvollständige) Photographie vom Umriss eines Tic-Tac-Toe-Spielfeldes mit 3×3 quadratischen Feldern. Zeichnen Sie die Felder *perspektivisch richtig* ein. Beschreiben Sie Ihr Vorgehen, und lassen Sie eventuelle Hilfskonstruktionen erkennbar.

Hinweis: Es gibt mindestens drei verschiedene Lösungswege für diese Aufgabe. Finden Sie mindestens einen möglichen Ansatz. Gerne dürfen Sie selbst nach weiteren Lösungen suchen, sich darüber mit ihren Kommilitonen austauschen oder zu gegebener Zeit in der Musterlösung nachlesen.