TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Zentrum Mathematik

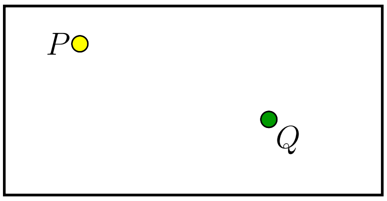
Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Geometriekalküle WS 2010/11
Aufgabenblatt 2 (3. November 2010)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 7. Billard.

Auf einem rechteckigen Billard-Tisch liegen zwei Kugeln. Eine von diesen soll so angespielt werden, dass sie die andere trifft.



a) Zeichnen Sie in die obige Abbildung (oder noch besser eine Kopie auf eigenem Karopapier) die Bahn ein, auf der die Kugel P zuerst die obere Bande, dann die rechte Bande und schließlich die Kugel Q trifft. Sie können davon ausgehen, dass die Kugeln punktförmig sind und an den Banden einfach reflektiert werden, ohne Dralleffekte oder dergleichen.

b) Jetzt werden die Banden durch Teleporter ersetzt, die gegenüberliegende Kanten so identifizieren, dass die Topologie eines Torus entsteht. Zeichnen Sie eine Bahn ein, bei der die Kugel P zweimal die lange und einmal die kurze Kante kreuzt, bevor sie auf die Kugel Q trifft.

c) Eine Umpolung einzelner Teleporter identifiziert gegenüberliegende Kanten so, dass die Topologie der reellen projektiven Ebene entsteht. Finden Sie auch hier einen Bahnverlauf, der zweimal die lange und einmal die kurze Kante kreuzt.

Aufgabe 8. Determinanten.

a) Beweisen Sie folgende Gleichung:

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Abgekürzt werden wir dies auch schreiben als $\det(a, b, c) = \langle a \times b, c\rangle$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}^3$.

b) Benutzen Sie dieses Ergebnis, um folgenden Satz zu beweisen:

Drei Punkte a, b, c liegen genau dann auf einer Geraden, wenn ihre homogenen Koordinaten die Gleichung $\det(a, b, c) = 0$ erfüllen.

c) Formulieren Sie einen entsprechenden Satz, der eine Aussage über drei Geraden macht, deren Determinante verschwindet.

Aufgabe 9. Fixgeraden und -punkte

a) Gegeben sei folgende affine Abbildung in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Fixpunkte und Fixgeraden dieser Abbildung in $\mathbb{R}^2$.

b) Ein Repräsentant der entsprechenden projektiven Transformation lautet:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 15 & 12 & 0 \\ 3 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

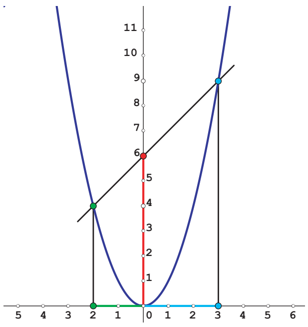
Bestimmen Sie die Fixpunkte dieser Abbildung in $\mathbb{RP}^2$. Gehen Sie dazu von der Matrix aus, nicht von der Lösung der vorherigen Teilaufgabe.

c) Bestimmen Sie die Fixpunkte der folgenden Abbildung in $\mathbb{RP}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

— ***Hausaufgaben*** —

Aufgabe 10. Parabelrechner.



In der Mathematikausstellung ix-quadrat findet sich das rechts abgebildete Exponat. Die Kurve ist eine gewöhnliche Standardparabel mit der Gleichung $y = x^2$.

Will man zwei Zahlen a und b miteinander multiplizieren, so verbindet man die Punkte der Normalparabel bei $x = -a$ und $x = b$ miteinander. Schneidet man diese Gerade mit der y-Achse, so landet man genau im Punkt $(0, a \cdot b)^T$.

Beweisen Sie diese Eingenschaft mit Hilfe von homogenen Koordinaten und dem Kreuzprodukt.

Aufgabe 11. Matrizen euklidischer Abbildungen.

Bestimmen Sie Matrizen aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$, die die folgenden Transformationen auf homogenen Koordinaten beschreiben.

a) Eine Spiegelung an der Geraden $x = 3$.

b) Eine Drehung um 180° um den Ursprung.

c) Eine Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn um den Punkt $(4, 7)^T$.

d) Eine Drehung um den Ursprung, die den Punkt $(9, 12)^T$ auf die x-Achse abbildet.

e) Eine Spiegelung an der Geraden durch die Punkte $(2, -4)^T$ und $(-6, 2)^T$.

Aufgabe 12. Affine Abbildung durch drei Punkte.

Bestimmen Sie eine Matrix für die affinen Abbildung, die durch die folgenden drei Paare von Urbild und Bild in $\mathbb{RP}^2$ gegeben ist.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$