TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Zentrum Mathematik

Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert, Martin von Gagern

Geometriekalküle WS 2010/11

Aufgabenblatt 1 (20. Oktober 2010)

— ***Präsenzaufgaben*** —

Aufgabe 1. Dualität.

Gegeben seien die folgenden drei Axiome.

(i) *Zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.*

(ii) *Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.*

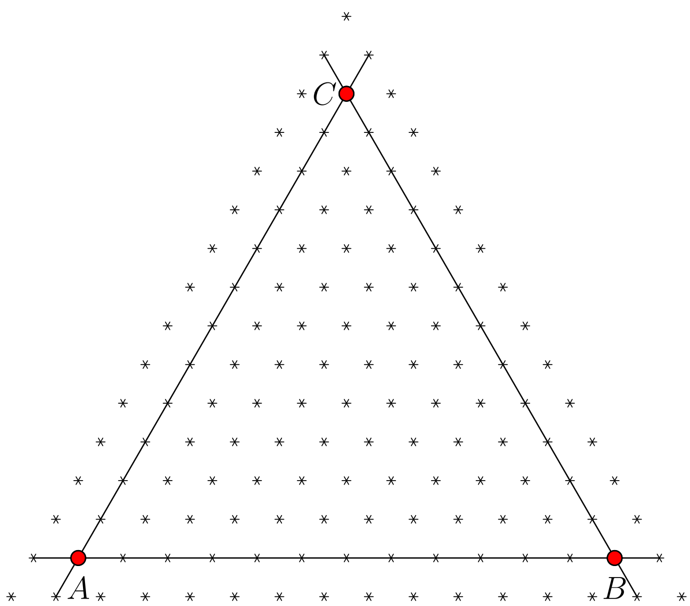
(iii) *Es gibt vier paarweise verschiedene Punkte A, B, C, D, so dass keine drei von ihnen auf einer Geraden liegen.*

Zeigen Sie, dass wenn die drei Axiome vorausgesetzt werden, der folgende Satz gilt:

Es gibt vier paarweise verschiedene Geraden a, b, c, d, so dass sich keine drei von ihnen in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 2. Andere Einbettung.

Nun sei die euklidische Ebene im $\mathbb{R}^3$ nicht kanonisch auf $z = 1$ eingebettet, sondern so, dass sie durch die Punkte $A = (1,0,0)^T$, $B = (0,1,0)^T$ und $C = (0,0,1)^T$ des $\mathbb{R}^3$ verläuft. Rechts finden Sie eine Draufsicht auf die eingebettete Ebene.



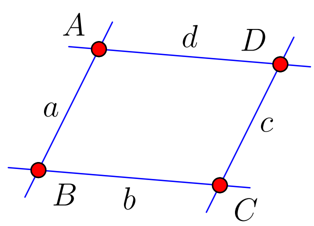
a) Skizzieren Sie die Lage der Ebene in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.

b) Zeichnen Sie die Punkte mit den folgenden homogenen Koordinaten in diese Draufsicht ein:

$$p_1 = (1,1,0)^T$$
$$p_2 = (1,1,1)^T$$
$$p_3 = (-3,0,-1)^T$$
$$p_4 = (2,1,1)^T$$
$$p_5 = (-1,6,7)^T$$

c) Geben Sie die homogenen Koordinaten der Ferngerade dieser Einbettung an.

Aufgabe 3. Parallelogramm.



Gegeben seien die homogenen Koordinaten der Punkte A, B und C. Zusammen mit einem vierten Punkt D bilden diese ein Parallelogramm $ABCD$, wobei die Ecke D der Ecke B gegenüber liegt. Geben Sie eine Formel an, mit der die homogenen Koordinaten des Punktes D ausgerechnet werden können.

Aufgabe 4. Koordinatenachsen.

Bestimmen Sie homogene Koordinaten für die x- und y-Achse sowie den Koordinatenursprung der Zeichenebene. Verwenden Sie die Standardeinbettung mit $z = 1$.

Aufgabe 5. Homogene Koordinaten.

Zeichnen Sie die folgenden Objekte in die rechts abgebildete gewöhnlichen (x, y)-Ebene (eingebettet in den $\mathbb{R}^3$ auf $z = 1$) ein.

a) Punkte mit homogenen Koordinaten:

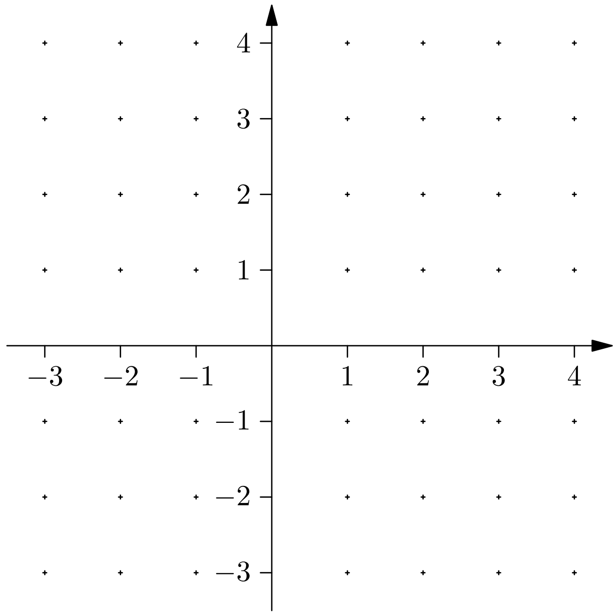
$$p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad p_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad p_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Geraden mit homogenen Koordinaten:

$$l_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad l_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad l_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$l_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad l_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad l_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Aufgabe 6. Projektives Konstruieren.

Gegeben sei die folgende (unvollständige) Photographie vom Umriss eines Schachbretts. Zeichnen Sie die Felder des Schachbretts *perspektivisch richtig* ein. Benutzen Sie dazu die Tatsache, dass eine solche (Zentral-)Projektion Kollinearitäten erhält: Punkte, die in der Ebene des Schachbretts auf einer Gerade liegen, liegen auch auf dieser Abbildung auf einer Geraden.