Repetitorium Geometriekalküle

zur Vorlesung von Prof. Dr. Dr. Richter-Gebert

Technische Universität München

16. Februar 2011

$\mathbb{R}P^2$

- Homogene Koordinaten
- Kegelschnitte
- Transformationen und Invarianten
- Unterscheidung: Transformation $\leftrightarrow$ Kegelschnitt
- Doppelverhältnisse

$\mathbb{C}P^1$

- Möbius-Trafos und Kozirkularität

$\mathbb{R}P^2 \cup \{\mathtt{I}, \mathtt{J}\}$

- Winkel- und Längenmessung

$\mathbb{R}P^d$

- Grassmann-Plücker-Relationen
- Join und Meet

Homogene Koordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \sim \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} a \cdot t \\ b \cdot t \\ 1 \end{pmatrix} \sim \lim_{t\to\infty} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1/t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{p}\,\mathcal{I}\,\mathrm{g} \Leftrightarrow ax + by + c = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \langle \mathrm{g}, \mathrm{p} \rangle = 0$$

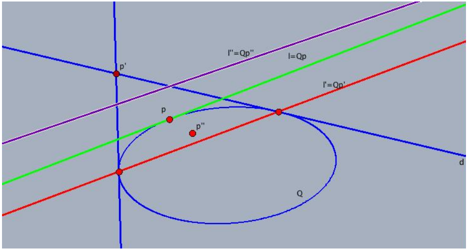
$$\langle \mathrm{g}, \mathrm{p} \rangle = 0 \wedge \langle \mathrm{g}, \mathrm{q} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \langle \mathrm{g}, \lambda \mathrm{p} + \mu \mathrm{q} \rangle = 0 \\ \mathrm{g} = \mathrm{p} \times \mathrm{q} \end{cases}$$

Kegelschnitte

$$\mathrm{p} \in \mathrm{Q} \Leftrightarrow ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{p}^T \mathrm{Q}\, \mathrm{p} = 0$$

Tangente an Q durch p:
$\mathrm{l} = \mathrm{Q}\, \mathrm{p}$
$\mathrm{p} \notin \mathrm{Q} \Rightarrow \mathrm{Q}\, \mathrm{p}$ heißt Polare



Transformationen

$$p' = Mp \quad , \quad \det(M) \neq 0$$

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{M'} & & t_x \\ & & t_y \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle g', p' \rangle \stackrel{!}{=} \langle g, p \rangle \Rightarrow g' = \left(M^{-1}\right)^T g$$

$$(p')^T Q' p' \stackrel{!}{=} p^T Q p \Rightarrow Q' = \left(M^{-1}\right)^T Q M^{-1}$$

Invarianten

	Orient.	Längen	Winkel	Verh.	Doppelverh.
Rotation	✓	✓	✓	✓	✓
Translation	✓	✓	✓	✓	✓
Spiegelung		✓	✓	✓	✓
Ähnlichkeitsabb.			✓	✓	✓
lineare Abb. ($\mathbb{R}^2$)				✓	✓
affine Abb.				✓	✓
projektive Abb.					✓

Unterscheidung: Transformation $\leftrightarrow$ Kegelschnitt

Transformation

$$\det(M) \neq 0$$

$$p' = Mp$$

$$Mp \in \mathcal{P}$$

$$g' = \left(M^{-1}\right)^T g$$

$9 - 1 = 8$ freie Parameter

$\Rightarrow$ festgelegt durch 4 Punktepaare $p \mapsto p'$

Kegelschnitt

$$Q^T = Q$$

$$p^T Q p = 0$$

$$Qp \in \mathcal{L}$$

$$g^T Q^{-1} g = 0 \;\Rightarrow\; g \text{ Tangente}$$

$9 - 3 - 1 = 5$ freie Parameter

$\Rightarrow$ festgelegt durch 5 Punkte

Doppelverhältnisse I

$$\mathbb{R}^1, \mathbb{C}^1: \quad (A, B; C, D) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Big/ \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}$$

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^1, \mathbb{C}\mathrm{P}^1: \quad (A, B; C, D) = \frac{[AC]\,[BD]}{[AD]\,[BC]}$$

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^2, \mathbb{C}\mathrm{P}^2: \quad (A, B; C, D)_X = \frac{[XAC]\,[XBD]}{[XAD]\,[XBC]}$$

DV unter projektiven Transformationen:

$$(A', B'; C', D')_{X'} = \frac{[MX, MA, MC]\,[MX, MB, MD]}{[MX, MA, MD]\,[MX, MB, MC]} = \frac{\det(M)^2\,[XAC]\,[XBD]}{\det(M)^2\,[XAD]\,[XBC]} = (A, B; C, D)_X$$

Doppelverhältnisse II

$$A, B, C, D \text{ kollinear } \Rightarrow (A, B; C, D)_X \text{ unabhängig von X}$$

$$A, B, C, D \text{ nicht kollinear } \Rightarrow (A, B; C, D)_X = (A, B; C, D)_Y$$

$$\Leftrightarrow \text{ A,B,C,D,X,Y liegen auf einem Kegelschnitt}$$

Doppelverhältnis von 4 konkurrenten Geraden ist definiert als Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden.

Doppelverhältnisse III

$$\lambda = (A, B; C, D) = (C, D; A, B) = \frac{1}{(B, A; C, D)} = \dots$$

Andere Permutationen $\rightarrow \lambda,\ \frac{1}{\lambda},\ 1-\lambda,\ 1-\frac{1}{\lambda},\ \frac{1}{1-\lambda},\ \frac{\lambda}{\lambda-1}$

$(A, B; C, D) = -1 \ \Rightarrow\ \{A, B\}$ und $\{C, D\}$ liegen harmonisch

$$(A, B; M_{AB}, \infty) = -1$$

$$\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = -1 \rightarrow \text{projektive Skala}$$

$\mathbb{C}\mathrm{P}^1$

$$z = x + iy; \quad z \mapsto \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \sim \lambda \cdot \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Möbius-Transformation:

$$p \mapsto Mp; \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Möbius-Trafos erhalten Doppelverhältnisse.

Kozirkularität:

$(A, B; C, D) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow A, B, C$ und D kozirkular (oder kollinear)

Geraden sind Kreise, die ∞ enthalten.

$\mathbb{RP}^2 \cup \{\mathtt{I}, \mathtt{J}\} \subset \mathbb{CP}^2$

$$[A, B, \mathtt{I}] = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & -i \\ a_2 & b_2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (a_1 + i a_2) - (b_1 + i b_2) = z_A - z_B$$

$$(B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J})_A = e^{2i\varphi}; \quad \varphi = \sphericalangle_A(B, C)$$

$$(B, C; \mathtt{I}, \mathtt{J})_A = -1 \;\Leftrightarrow\; AB \perp AC$$

Satz von Laguerre:

$$\varphi(g, l) = \frac{1}{2i} \ln\left(F_g, F_l; \mathtt{I}, \mathtt{J}\right)$$

Längenmessung:

$$d(A, B) = \sqrt{\frac{[AB\mathtt{I}][AB\mathtt{J}]}{[OE\mathtt{I}][OE\mathtt{J}]} \cdot \frac{[O\mathtt{I}\mathtt{J}][E\mathtt{I}\mathtt{J}]}{[A\mathtt{I}\mathtt{J}][B\mathtt{I}\mathtt{J}]}} \quad \text{mit } 1 := \overline{OE}$$

Grassmann-Plücker-Relationen

Im $\mathbb{R}P^d$ werden verschiedene Objekte durch unterschiedlich lange Vektoren dargestellt: n-dimensionale Objekte tragen n+1 Plücker-Indizes und haben damit $\binom{d+1}{n+1}$ Einträge im Plücker-Vektor. Die Einträge sind voneinander abhängig → Grassmann-Plücker-Relationen.

$$[A_1 \dots A_{d-1} B_1][B_2 \dots B_{d+1}] - [A_1 \dots A_{d-1} B_2][B_1 B_3 \dots B_{d+1}] \pm \dots = 0$$

$$[AB][CD] - [AC][BD] + [AD][BC] = 0$$

$$[ABC][DEF] - [ABD][CEF] + [ABE][CDF] - [ABF][CDE] = 0$$

Join und Meet

Join:

$$C = A \vee B; \quad C_\tau = \sum_{\substack{\lambda,\mu \\ \lambda \dot{\cup} \mu = \tau}} \operatorname{sgn}(\lambda\mu) A_\lambda B_\mu$$

im $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$:

$$g = p \vee p' , \quad g_{13} = p_1 \cdot p'_3 - p_3 \cdot p'_1$$

$$e = p \vee g , \quad e_{134} = p_1 \cdot g_{34} - p_3 \cdot g_{14} + p_4 \cdot g_{13}$$

Meet:

$$C = A \wedge B; \quad C_\tau = \sum_{\substack{\lambda,\mu \\ \lambda \cap \mu = \tau}} \operatorname{sgn}((\lambda \setminus \tau)(\mu \setminus \tau)) A_\lambda B_\mu$$

im $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$:

$$g = e \wedge e' , \quad g_{13} = e_{123} \cdot e'_{134} - e_{134} \cdot e'_{123}$$

$$p = g \wedge e , \quad p_2 = g_{12} \cdot e_{234} - g_{23} \cdot e_{124} + g_{24} \cdot e_{123}$$