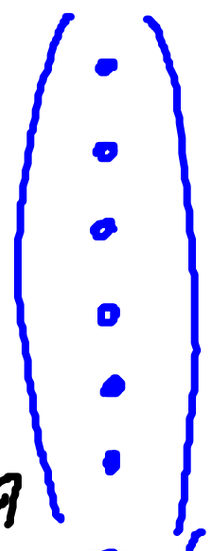
Letztes Mal: Geometrische Objekte im $\mathbb{RP}^3$, $\mathbb{RP}^d$
+ und deren Operationen

$\mathbb{RP}^3$ Punkte Geraden Ebenen



Werden repräsentiert durch Vektoren

Verbindungsgerade

$$p \vee q = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_4 & q_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_3 & q_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_2 & q_2 \\ p_4 & q_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p_3 & q_3 \\ p_4 & q_4 \end{vmatrix}$$

2x2 Unterdet. einer 2x4 Matrix

Verbindungsebene

$$p \vee q \vee r = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_4 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_4 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_4 \end{pmatrix}$$

3x3 Unterdet einer 3x4 Matrix

Allgemeiner Join und Meet (die Koordinaten)

Flats vom Rang k in einem Umgebungsraum vom Rang n werden durch Teilfolgen der Länge k von $(1 \dots n)$ indiziert

z.B $\mathbb{RP}^3$ hat Rang 4. Teilfolgen von $(1,2,3,4)$

Rang 0	Rang 1 Punkte	Rang 2 Geraden	Rang 3 Ebenen	Rang 4 Raum
$() \to a$	$1 \to a_1$	$12 \to b_{12}$	$123 \to c_{123}$	$1234 \to d_{1234}$
	$2 \to a_2$	$13 \to b_{13}$	$124 \to c_{124}$	
	$3 \to a_3$	$14 \to b_{14}$	$134 \to c_{134}$	
	$4 \to a_4$	$23 \to b_{23}$	$234 \to c_{234}$	
		$24 \to b_{24}$		
		$34 \to b_{34}$		

Allgemeiner Join und Meet (die Operationen)

rang k rang m rang k+m

$$\text{Join: } P \vee Q = R$$

$$k+m \leq n$$

rang k+m

$$R_\lambda = \sum_{(\tau,\mu);\,\tau\vee\mu=\lambda} sign(\tau,\mu)\cdot P_\tau \cdot Q_\mu$$

R_λ: k+m elementig, TF von (1...n)

$(\tau,\mu);\,\tau\vee\mu=\lambda$: k-elem TF, m elem. TF

rang k rang m rang k+m-n

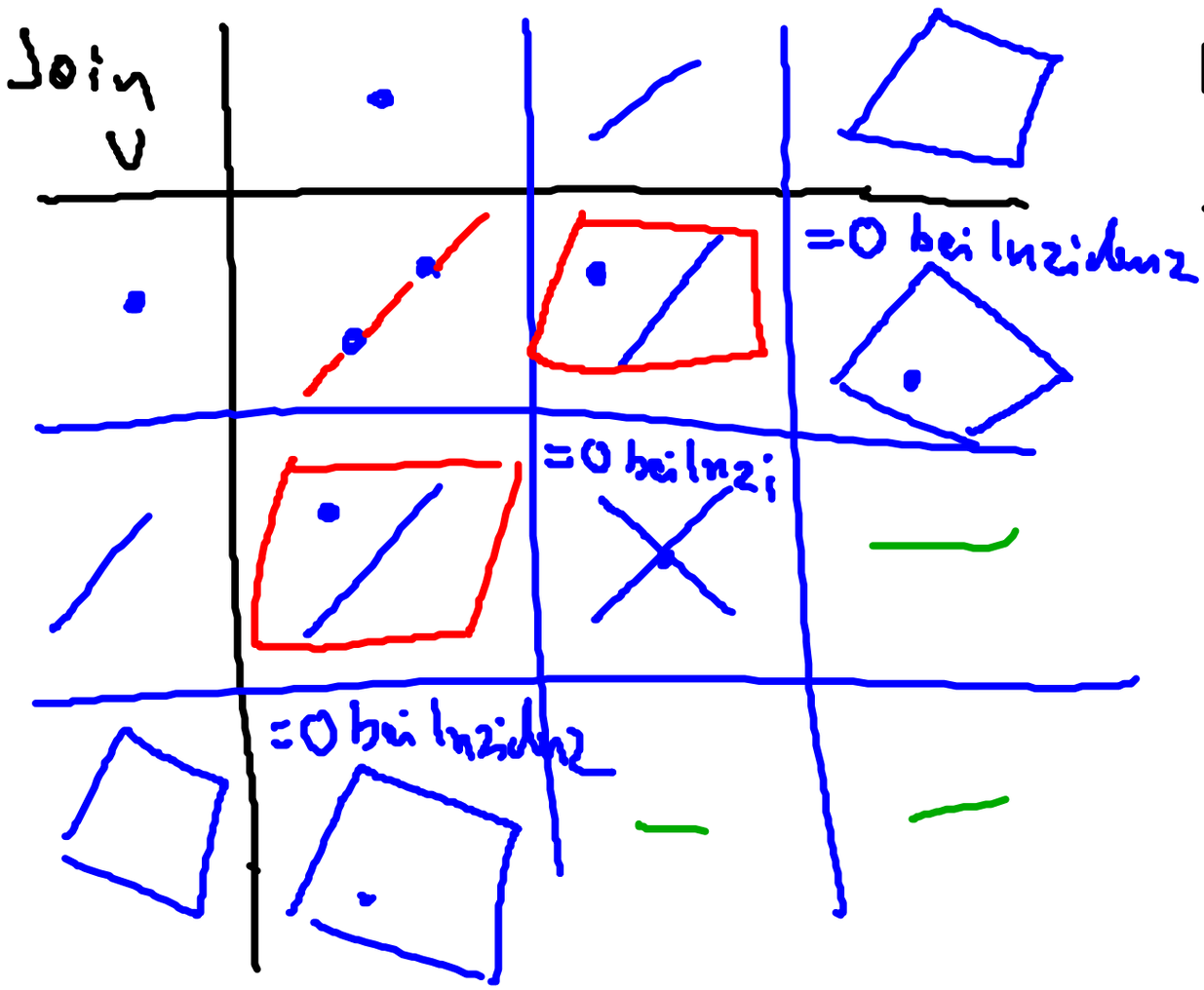
$$\text{Meet: } P \wedge Q = R$$

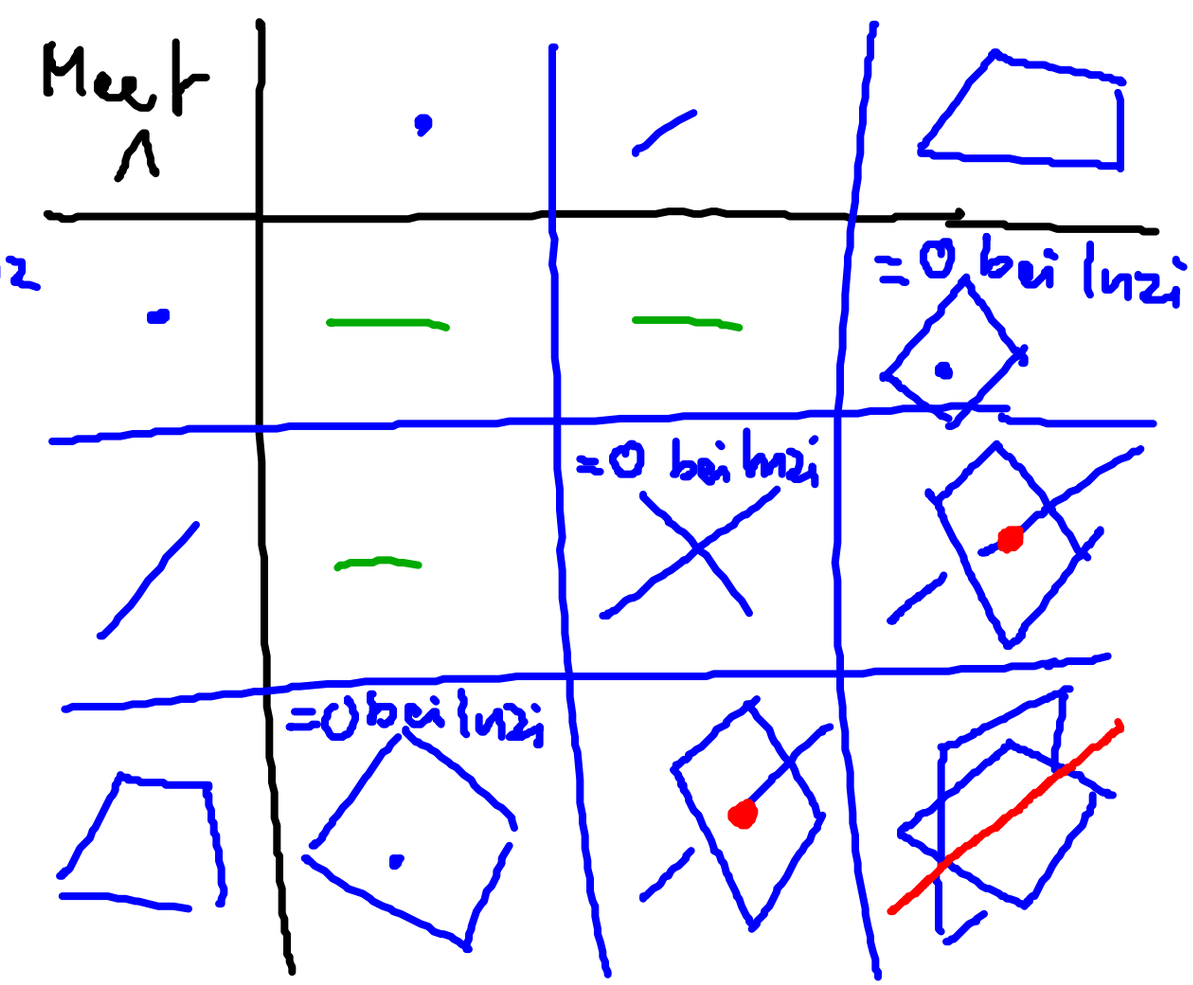
$$k+m-n \geq 0$$

$$R_\lambda = \sum_{(\tau,\mu);\,\tau\wedge\mu=\lambda} sign(\tau\lambda,\mu\lambda)\cdot P_\tau \cdot P_\mu$$

$(\tau,\mu);\,\tau\wedge\mu=\lambda$: k el. TF, m el TF

Was macht Join und Meet in $\mathbb{RP}^3$





Join einer Grade mit sich selbst

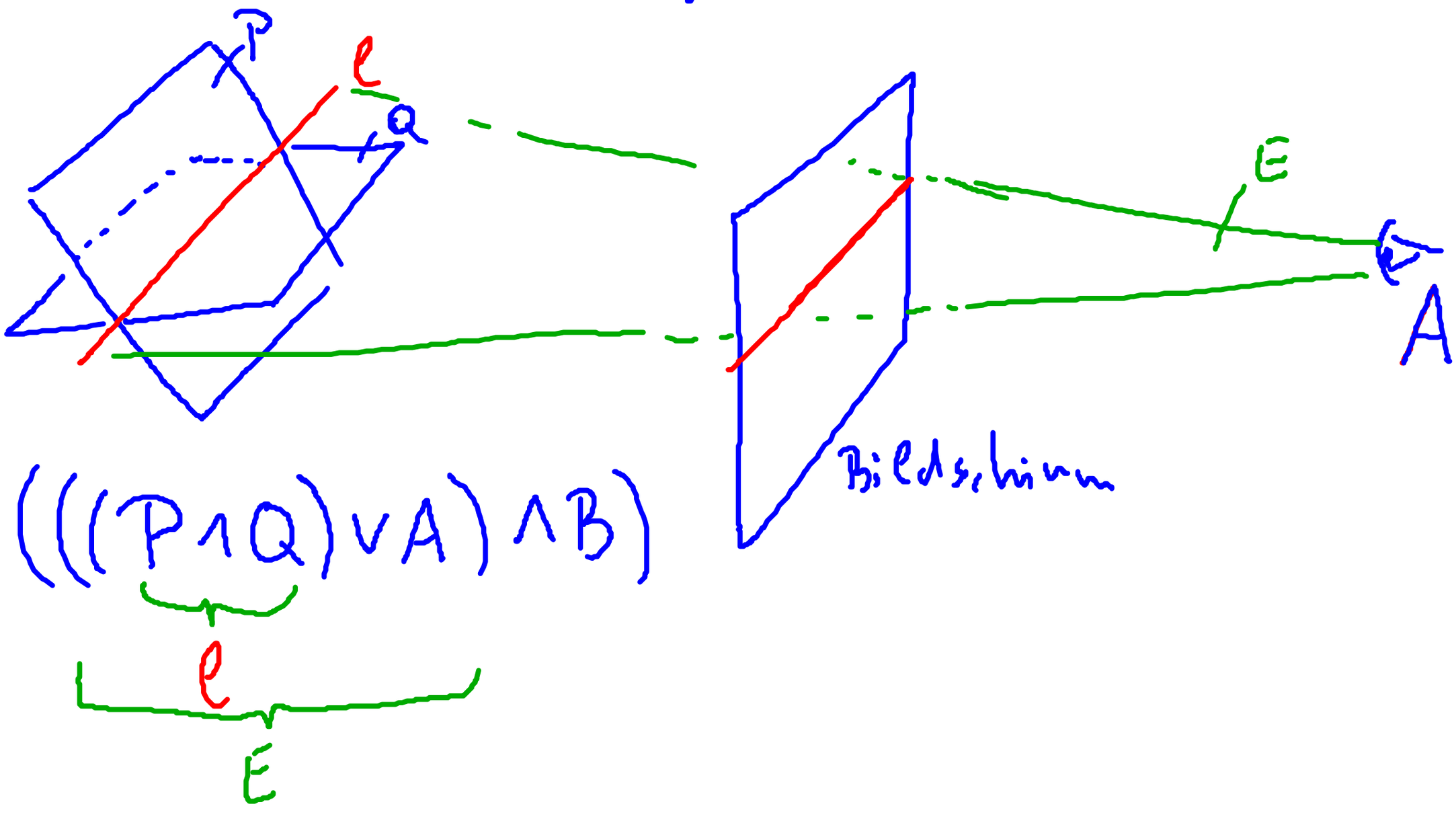
$$0 = g \vee g = \begin{matrix} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 23 \\ 24 \\ 34 \end{matrix}\begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{13} \\ g_{14} \\ g_{23} \\ g_{24} \\ g_{34} \end{pmatrix} \vee \begin{matrix} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 23 \\ 24 \\ 34 \end{matrix}\begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{13} \\ g_{14} \\ g_{23} \\ g_{24} \\ g_{34} \end{pmatrix} = (g_{12}g_{34} - g_{13}g_{24} + g_{14}g_{23}) \cdot 2$$

$$= 0$$

Grassmann Plücker Relation

Anwendung: z.B Computergraphik

Schnitt zweier Ebenen auf Bildschirm durch Zentralprojektion Darstellen



$(((P \wedge Q) \vee A) \wedge B)$

$P \wedge Q$: e

$((P \wedge Q) \vee A) \wedge B$: E

Grassmann Plücker Relationen

$\mathbb{RP}^1$, $r=2, n=4$ Für bel Punkte a,b,c,d in $\mathbb{RP}^1$

$[a\,b][c\,d]-[a\,c][b\,d]+[a\,d][b\,c]=0$

$\mathbb{RP}^2$, $r=3, n=6$ Für bel Punkte $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{RP}^2$

$[abc][def]-[abd][cef]+[abe][cdf]-[abf][cde]=0$

$\mathbb{RP}^d$ $r=d+1$ Für Punkte $S_{cy} \ni (a_1 \dots a_{r-1})$ $\lambda=(b_1 \dots b_{r+1})$

$$\sum_{i=1}^{r+1} (-1)^{(i+1)} [a_1 \dots a_{r-1} b_i][b_1 \dots \hat{b_i} \dots b_{r+1}] \equiv 0$$