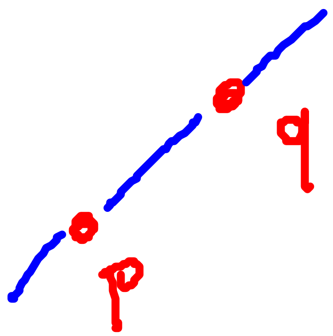
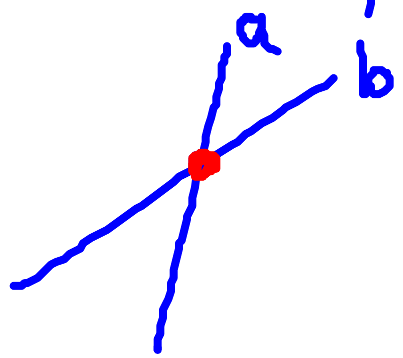
(8) Projektive Geometrie im $\mathbb{RP}^3$ ($\mathbb{RP}^d$)

Leitmotive bisher (in $\mathbb{RP}^2$ und $\mathbb{RP}^1$)

- mit geom. Objekten rechnen
- homogene Koordinaten
- 

$p \times q$


$a \times b$
- Dualität
- unendlich ferne Elemente
- Transformationen als Matrixmultiplikation

$\Rightarrow$ Alles das geht auch im $\mathbb{R}^d$

$\mathbb{R}P^3$ Punkte

$\mathbb{R}^3 \qquad\qquad \mathbb{R}^4$

Homogene Koordinaten: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$ ← Homogenisierungs Koordinate

Identifiziere skalare Vielfache

$$\frac{\mathbb{R}^4 - \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}}{\mathbb{R} - \{0\}}$$ ← Menge der Punkte im $\mathbb{R}P^3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ ~ Elemente im Unendlichen

zu jeder Richtung im Raum gibt es genau einen Punkt im ∞. Alle Punkte im ∞ bilden eine Projekt. Ebene

4 Punkte $A\,B\,C\,D$ des $\mathbb{R}P^3$ liegen auf gem. Ebene wenn $\det(A\,B\,C\,D) = 0$

$\mathbb{R}P^2$ Ebenen

in $\mathbb{R}^3$ $\quad h = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; ax + by + cz + d = 0 \right\}$ Ebenengleichung

⇝ homogene Koordinaten für h sind $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ (skalare Vielfache identifizieren)

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ = Ebene im ∞ $= h_\infty$

Raum der Ebenen: $\dfrac{\mathbb{R}^4 - \{0\}}{\mathbb{R} - \{0\}}$

In homogenen Koordinaten: Punkt p inzident mit Ebene h $\Leftrightarrow \langle p, h \rangle = 0$

Verbindungsebene dreier Punkte p_1, p_2, p_3

Suche h in $\mathbb{R}^4 - \{0\}$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} - & p_1 & - \\ - & p_2 & - \\ - & p_3 & - \end{pmatrix}}_{P} \begin{pmatrix} | \\ h \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ a & b & c & d \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

⇒ Bitte blättern

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ a & b & c & d \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} | & | & | \\ b & c & d \\ | & | & | \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} | & | & | \\ a & c & d \\ | & | & | \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} | & | & | \\ a & b & d \\ | & | & | \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

← geschlossene Form für h

Es gilt $\langle P_i, h \rangle = 0$

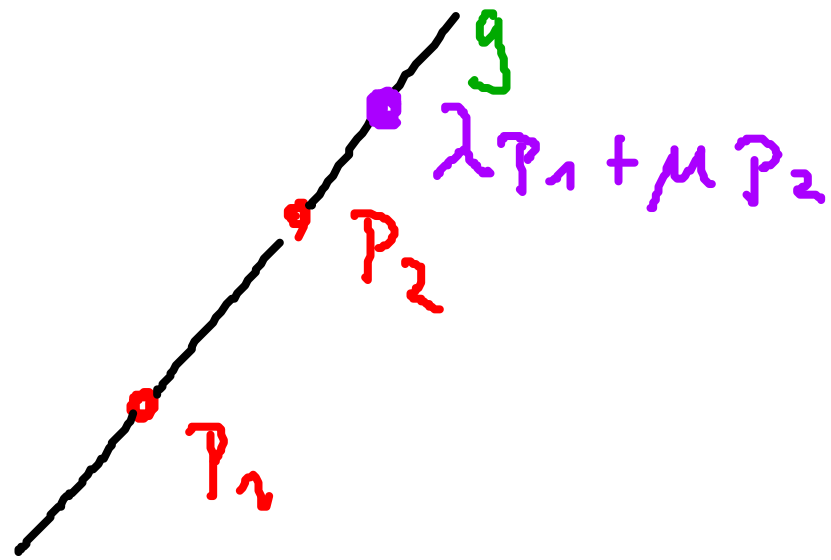
<u>Bew</u>

$$\langle P, h \rangle = \det \begin{pmatrix} — & P & — \\ — & P_1 & — \\ — & P_2 & — \\ — & P_3 & — \end{pmatrix}$$

wird $= 0$ für $P = P_i$

und damit sogar für alle $\lambda P_1 + \mu P_2 + \tau P_3 = P$

Geraden im $\mathbb{RP}^3$



Von p_1 und p_2 aufgespannte Gerade:

$$2\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} — p_1 — \\ — p_2 — \end{pmatrix}}_{4}\right. = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ a & b & c & d \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

Gerade $p_1 \vee p_2$

$$\begin{pmatrix} | \\ p_1 \\ | \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} | \\ p_2 \\ | \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} | & | \\ c & d \\ | & | \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} | & | \\ b & d \\ | & | \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} | & | \\ b & c \\ | & | \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} | & | \\ a & d \\ | & | \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} | & | \\ a & c \\ | & | \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} | & | \\ a & b \\ | & | \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Plückerkoordinaten von g

- linear in p_1 und p_2

  $(p_1+q_1)\vee p_2 = p_1 \vee p_2 + q_1 \vee p_2$

  $(\lambda p_1)\vee p_2 = \lambda \cdot (p_1 \vee p_2)$

- antikommutativ $p_1 \vee p_2 = -p_2 \vee p_1$
- hängt bis auf Vorfaktor nicht von der spez. Wahl von p_1 und p_2 ab.

  $(\lambda p_1 + \mu p_2)\vee p_2 = \lambda(p_1 \vee p_2) + \mu \underbrace{(p_2 \vee p_2)}_{=0} = \lambda(p_1 \vee p_2)$

- homogen (ident. skal. Vielfache)
- Einzelnen Einträge von g sind nicht unabhängig

Determinantenabhängigkeiten

$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ a & b & c & d \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$ seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2$ und $[x\ y] = \det\begin{pmatrix} | & | \\ x & y \\ | & | \end{pmatrix}$

Dann gilt: $[ab][cd] - [ac][bd] + [ad][bc] = 0$

↑ Spezialfall allgemeiner Grassmann-Plücker-Relationen.

Geraden im Raum haben geometrisch 4 Freiheitsgrade (DOF)

6 Koordinateneinträge − 1 homog − 1 Relation = 4 DOF

Also bisher: lineare Objekte im $\mathbb{RP}^3$

	Punkte	Geraden	Ebenen	Raum
$(\cdot) \in \mathbb{R}^1$	$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$	$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^6$	$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}^4$	$(\cdot)$
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
0×0 Unterdet vom ( )	1×1 Unterdet der Matrix $\begin{pmatrix} - & p_1 & - \end{pmatrix}$	2×2 Unterdet der Matrix $\begin{pmatrix} - & p_1 & - \\ - & p_2 & - \end{pmatrix}$	3×3 Unterdet der Matrix $\begin{pmatrix} - & p_1 & - \\ - & p_2 & - \\ - & p_3 & - \end{pmatrix}$	4×4 Unterdet $\begin{pmatrix} - & p_1 & - \\ - & p_2 & - \\ - & p_3 & - \\ - & p_4 & - \end{pmatrix}$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

System zum Buchführen der Koordinaten im $\mathbb{RP}^d$

$d=3$

Rang = geometrische Dimension + 1

Rang 0 $\rightsquigarrow$ $\{\}$
Rang 1 $\rightsquigarrow$ Punkt
Rang 2 $\rightarrow$ Gerade
Rang 3 $\rightsquigarrow$ Ebene
Rang 4 $\rightsquigarrow$ 3-dim Räume

Die Koordinateneinträge von Objekten von Rang k im Umgebungsraum von Rang $r=d+1$ werden mit k-elementigen Teilsequenzen von $(1,2,\dots r)$ indiziert

Es werden 2 zwei Operationen
Join „∨" und Meet „∧" definiert

Lineare Vereinigung

Schnitt

$\cap$, $\cup$ sei nur auf diesen Sequenzen definiert

$(1,3)\cup(2)=(1,2,3)$

$(1,2,3)\cap(2,4)=(2)$

rang m+k rang k rang m

Join $R = P \vee Q$

$k + m \leq r$

$$R_\lambda = \sum_{\substack{(\tau, \mu) \\ \tau \cup \mu = \lambda}} \operatorname{sign}(\tau, \mu) P_\tau Q_\mu$$

Meet entsprechend