$\mathbb{RP}^2$

Kap 1 - 5

- Punkte, Geraden, Kegelschnitte
- Projektive Trafos
- Doppelverhältnisse
- Schnitt, Verbindungsgerade, Kegelschnitt durch 5 Pkte, Tangenten

$\mathbb{CP}^1$

Kap 6

- Punkte
- Kozirkularität (über Doppelverh. reell)

Verknüpfung von $\mathbb{RP}^2$ u. $\mathbb{CP}^1$

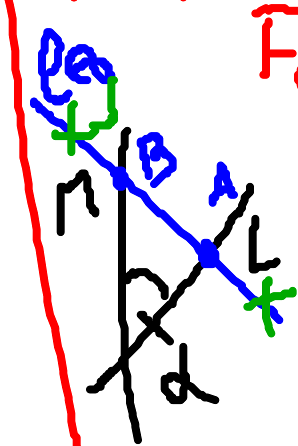
über $I = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Damit Möglich:

- Winkel
- Abstände
- Kreise
- Senkrechtstehen

⋮

Bsp. Laguerres Formel

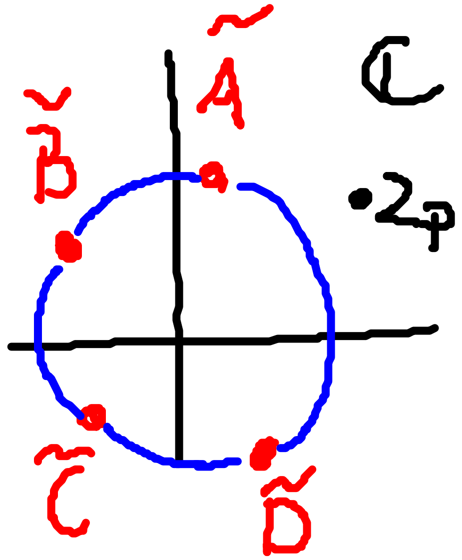


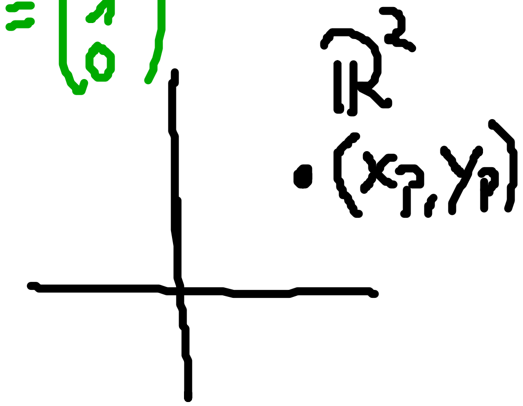
$\alpha = \frac{1}{2i} \cdot \ln((A,B;I,J))$

Letzes Mal: Zwei Welten

$$\mathbb{CP}^1 = \frac{\mathbb{C}^2 - \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}}{\mathbb{C} - \{0\}} \qquad \Bigg| \qquad \mathbb{RP}^2 = \frac{\mathbb{R}^3 - \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}}{\mathbb{R} - \{0\}}$$

& I und J, $I = \begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix}i\\1\\0\end{pmatrix}$





$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} z_p \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Bigg| \qquad P = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ 1 \end{pmatrix}$$

$z_p = x_p + i y_p$

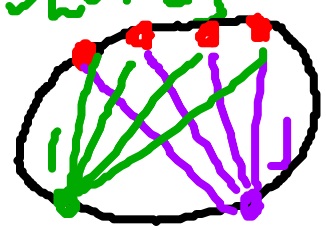
$x_p, y_p \in \mathbb{R}$

$$[\tilde{P}, \tilde{Q}] = \det\begin{pmatrix} z_P & z_Q \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \det\begin{pmatrix} x_Q & x_P & -i \\ y_Q & y_P & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = [QPI]$$

$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ kozirkular oder kollinear

$\Longleftrightarrow$ $(\tilde{A}, \tilde{B}; \tilde{C}, \tilde{D}) \in \mathbb{R}$

$$\hookrightarrow \frac{[\tilde{A}\,\tilde{C}][\tilde{B}\,\tilde{D}]}{[\tilde{A}\,\tilde{D}][\tilde{B}\,\tilde{C}]} \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad \frac{[ACI][BDI]}{[ADI][BCI]} = \frac{[ACJ][BDJ]}{[ADJ][BDJ]}$$



Kreise sind Kegelschnitte durch I und J

Andere Art der Herleitung:

$(x-t_x)^2+(y-t_y)^2=r^2$ ← klassische Kreisgleichung

$x^2-2xt_x+t_x^2+y^2-2yt_y+t_y^2-r^2=0$

$x^2+y^2+\alpha xz+\beta yz+\gamma z^2=0$ ← homogene Kreisgleichung

$I=\begin{pmatrix}-i\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow (-i)^2+1^2+0+0+0$ I eingesetzt in homogene Kreis Gl.

$=(-1)+1=0$

- Analoge Rechnung für J
- Umgekehrt kann man zeigen dass jeder KS durch I und J Kreis oder Geradenpaar (l_∞, h) ist

7 Euklidische Konstruktionen mit I und J

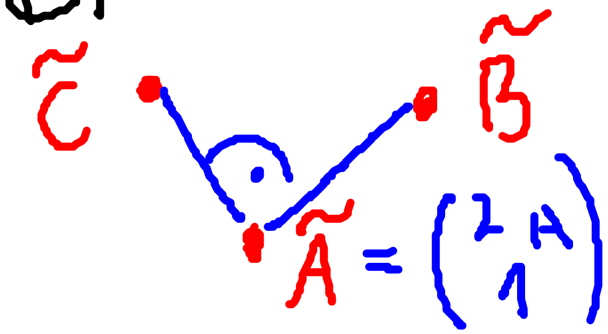
Nächstes Ziel: Weitere Euklidische Eigenschaften projektiv durch I und J ausdrücken

Methode: Zuerst in $\mathbb{C}P^1$ ausdrücken und dann durch I und J nach $\mathbb{R}P^2$ übersetzen

---

Bsp: Senkrecht stehen

$\mathbb{C}P^1$



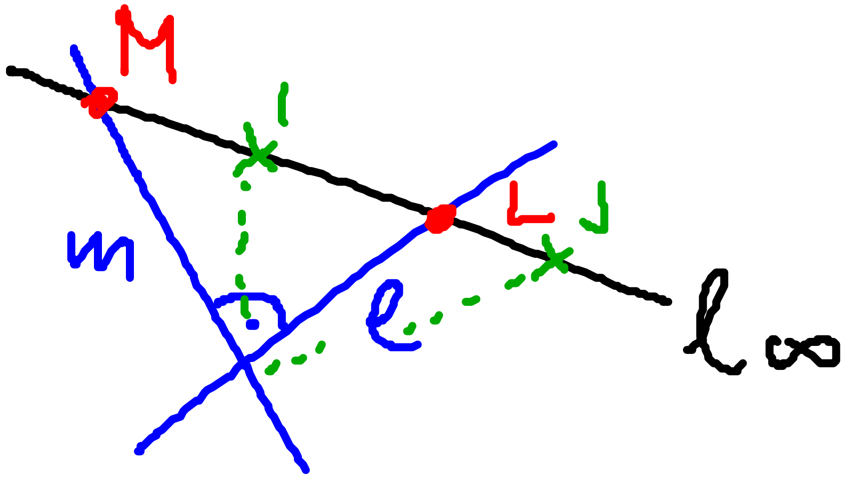
$$\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in i\mathbb{R} \iff \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = -\overline{\left(\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}\right)}$$

$$\frac{[\tilde{B}, \tilde{A}]}{[\tilde{C}, \tilde{A}]} = -\frac{\overline{[\tilde{B}\ \tilde{A}]}}{\overline{[\tilde{C}\ \tilde{A}]}}$$

Übergang von $\mathbb{C}P^1$ nach $\mathbb{R}P^2$

$$\frac{[B\,A\,I]}{[C\,A\,I]} = -\frac{[B\,A\,J]}{[C\,A\,J]}$$

$$\frac{[BAI][CAJ]}{[BAJ][CAI]} = (B, C; I, J)_A = -1$$

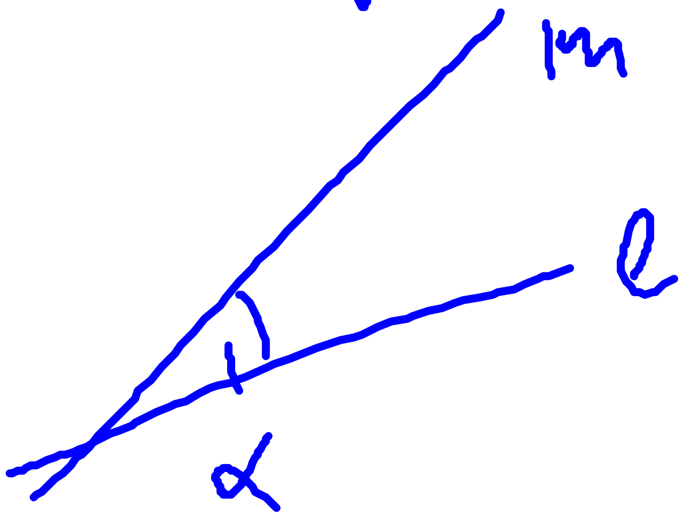


$$M = l_\infty \times m$$

$$L = l_\infty \times l$$

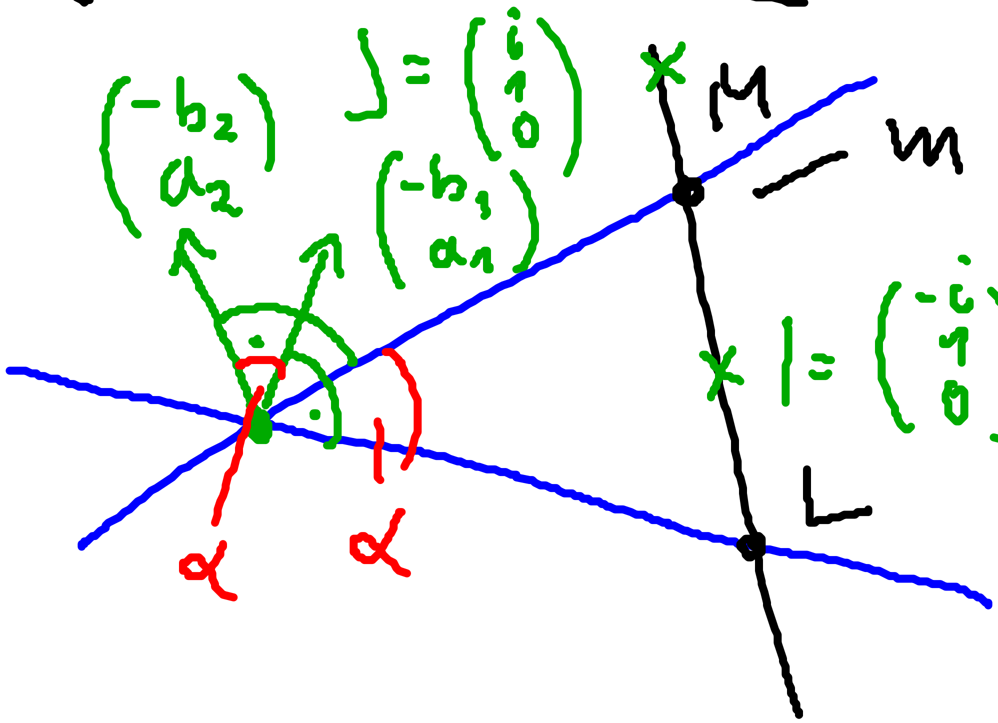
$$(M, L; I, J) = -1 \iff l \perp m$$

Spezialfall der Formel von Lagerre



$$\alpha = \frac{1}{2i} \ln\left((M, L; I\, J)\right)$$

Laguerres Formel



$$m=\begin{pmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}-b_2\\a_2\\0\end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix}-b_1\\a_1\\0\end{pmatrix}$$

$$l=\begin{pmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{pmatrix}$$

$$l_\infty=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$z_L=-b_1+ia_1=r_L\cdot e^{i\varphi_L}$$

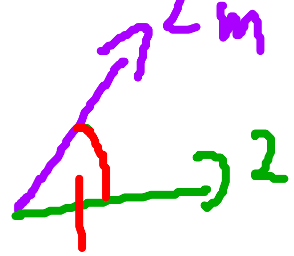
$$z_M=-b_2+ia_2=r_M\cdot e^{i\varphi_M}$$

Beobachtung

α ist der Winkel zwischen $\begin{pmatrix}-b_1\\a_1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-b_2\\a_2\end{pmatrix}$

$$\frac{z_L\,\overline{z_M}}{\overline{z_L}\,z_M}=\frac{r_L\cdot r_M\cdot e^{i\varphi_L}\cdot e^{-i\varphi_M}}{r_L\cdot r_M\cdot e^{-i\varphi_L}\cdot e^{i\varphi_M}}$$

$$=e^{2i(\varphi_L-\varphi_M)}=e^{2i\alpha}\qquad(1)$$



$\alpha=\varphi_L-\varphi_M$

Behauptung

$$z_L = [L, I, \ell_\infty] = \det\begin{pmatrix} -b_1 & -i & 0 \\ a_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -b_1 + i a_1$$

$$\overline{z_L} = [L, J, \ell_\infty]$$

$$z_M = [M, I, \ell_\infty]$$

$$\overline{z_M} = [M, J, \ell_\infty]$$

$$\frac{z_L \overline{z_M}}{\overline{z_L} z_M} = \frac{[L, I, \ell_\infty][M, J, \ell_\infty]}{[L, J, \ell_\infty][M, I, \ell_\infty]} = (L, M; I, J) \quad (\text{auf } \ell_\infty)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} (L, M; I, J) = e^{2i\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{2i} \cdot \ln\left((L M; I J)\right)}$$

Senkrechtstehen:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2i} \ln\left(\left(\text{L}, \text{M}_i \mid, \text{J}\right)\right)$$

$$i\pi = \ln\left(\text{LM}_i \mid \text{J}\right)$$

$$e^{i\pi} = \left(\text{LM}_i \mid \text{J}\right)$$

$$-1 = \left(\text{LM}_i \mid \text{J}\right)$$