⑥ Thema heute: $\mathbb{C}P^1$ (komplexe Projektive Gerade)

$$\mathbb{C}P^1 = \frac{\mathbb{C}^2 - \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}}{\mathbb{C}-\{0\}}$$

Punkte von $\mathbb{C}P^1$: $\left[\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right]$, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

komplexe Skalare Vielfache identifiziert

Homogenisierung:

$$\begin{array}{ccc} z & \longrightarrow & \begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix} \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{C} & & \mathbb{C}P^1 \end{array}$$

Dehomogenisierung

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} & \longrightarrow & a/b \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{C}P^1,\ b\neq 0 & & \mathbb{C} \end{array}$$

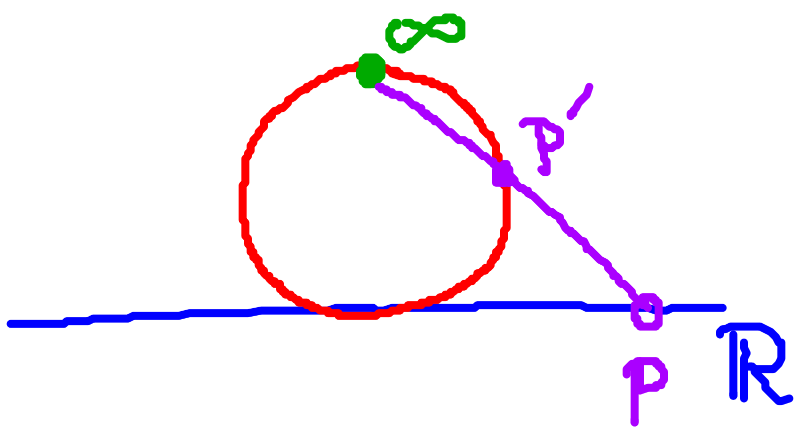
zusätzlich <u>ein</u> Punkt im Unendlichen:

$$\infty := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}}$$

Topologie von:

$\mathbb{RP}^1 \sim S^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

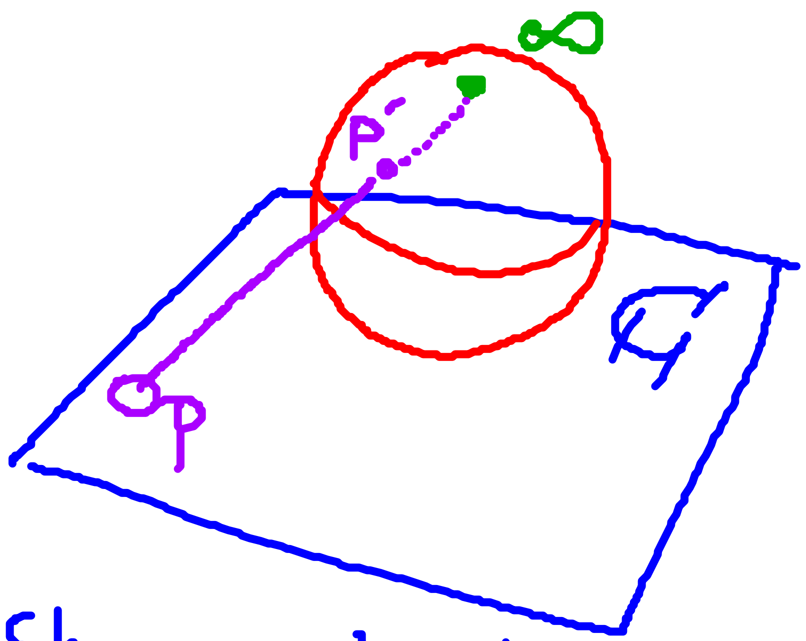


Stereographische Projektion von S^1 auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$P' \mapsto P$

$\infty \mapsto \infty$

$\mathbb{CP}^1 \sim S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$



Stereographische Projektion von S^2 auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$P' \mapsto P$

$\infty \mapsto \infty$

Zwei Betrachtungsweisen von $\mathbb{C}P^1$

$\mathbb{C}P^1$ — reell 2-dimensional

$\mathbb{C}P^1$ — komplex 1-dimensional

Randbemerkung

Wir haben jetzt 2 verschiedene Kompaktifizierungen von $\mathbb{R}^2$

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \cup \text{Gerade im } \infty \to \mathbb{R}P^2$$

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}, \quad \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}P^1$$

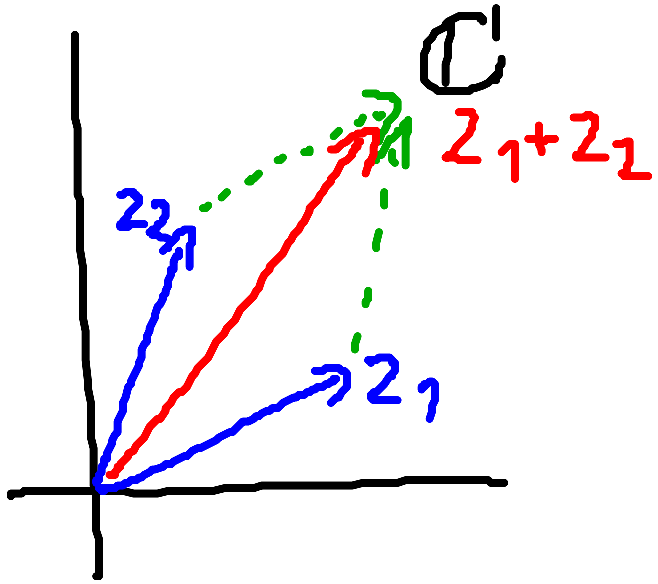
Geometrie komplexer Rechenoperationen

Addition

$z_1 = a_1 + ib_1$

$z_2 = a_2 + ib_2$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$



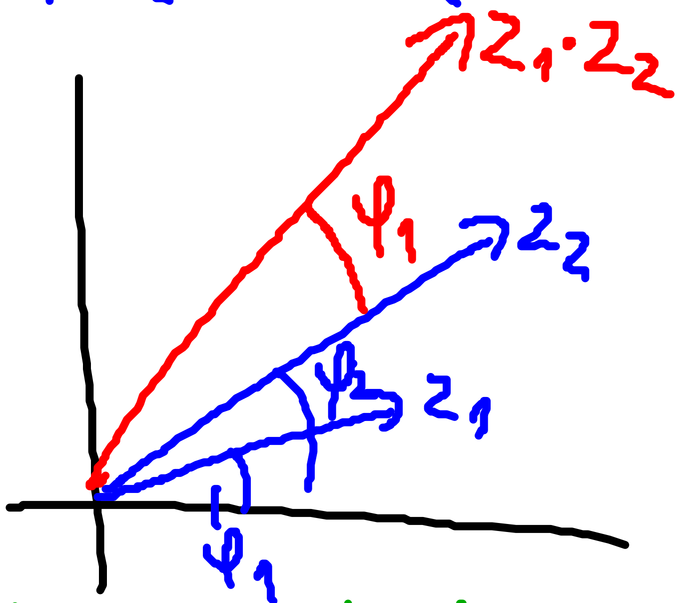
Addition mit einer komplexen Zahl $\sim$ Translation

Multiplikation

$z_1 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1}$

$z_2 = r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

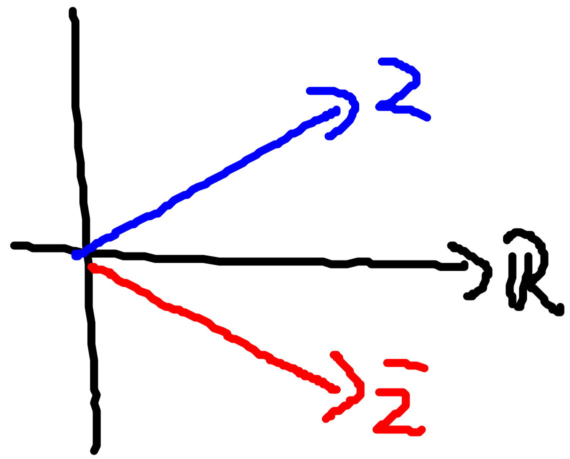


Multiplikation mit einer komplexen Zahl $\sim$ Drehstreckung

Konjugation

$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$



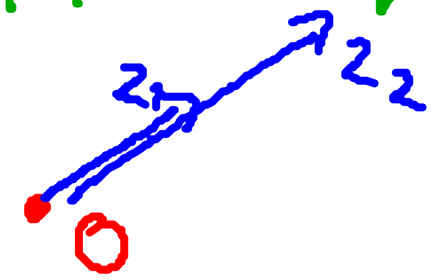
Konjugation ist Spiegelung am $\mathbb{R}$

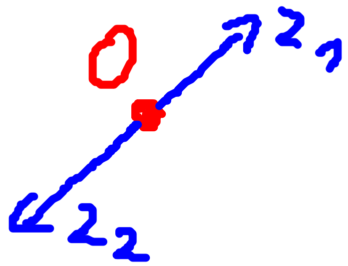
Wichtige Beziehungen (Tests für geometrische Eigenschaften)

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$, $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\bar{z}$

---

z_1, z_2 zeigen in die gleiche oder entgegengesetzte Richtung

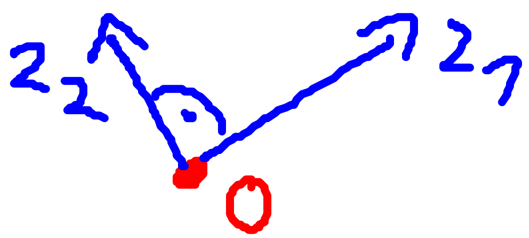




$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 = z_2 \bar{z}_1$

---

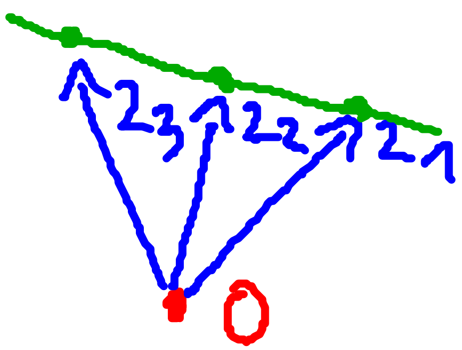
z_1, z_2 stehen senkrecht



$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} = -\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 = -z_2 \bar{z}_1$

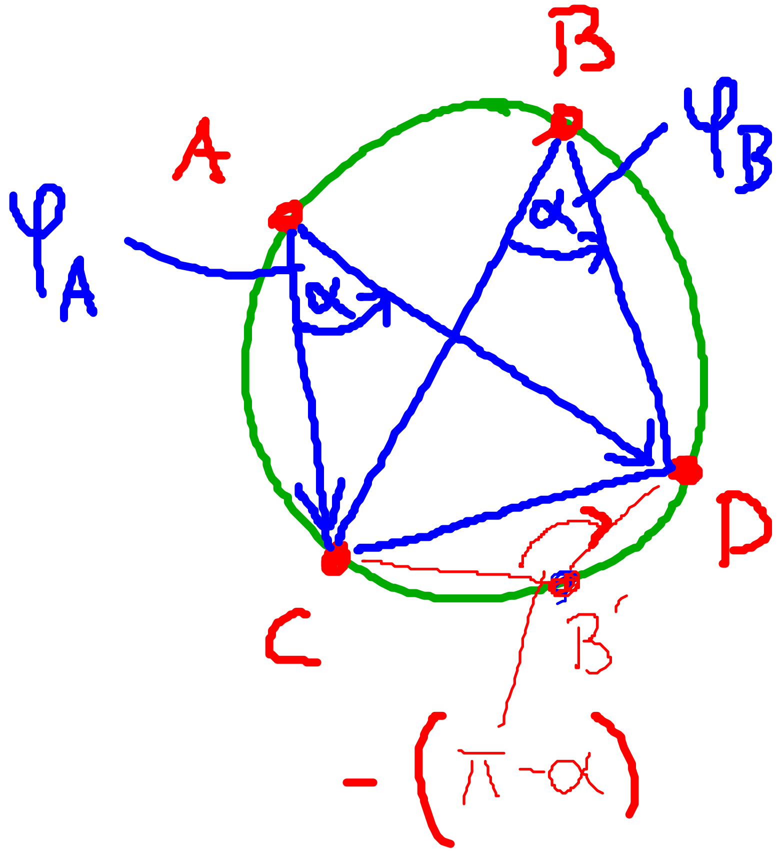
---

z_1, z_2, z_3 kollinear



$\Leftrightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \in \mathbb{R}$ ......

A, B, C, D kozirkular



$$\frac{A-C}{A-D} = r_A \cdot e^{i\varphi_A}$$

$$\frac{B-C}{B-D} = r_B \cdot e^{i\varphi_B}$$

Teste:
entweder
$\varphi_A = \varphi_B$
oder
$\varphi_A - \varphi_B = \pi$

$$\underbrace{\frac{A-C}{A-D} \Big/ \frac{B-C}{B-D}}_{\text{Doppelverh. in } \mathbb{C}P^1} = \underbrace{\frac{r_A}{r_B} \cdot e^{i(\varphi_A - \varphi_B)}}_{\in \mathbb{R}}$$

wenn A, B, C, D kozirkular sind

$(AB;CD) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$
$ABCD$ kozirkular oder kollinear

Die Eigenschaft dass A, B, C, D kozirkular oder kollinear sind ist eine unter proj Trafos in $\mathbb{C}P^1$ invariante Eigenschaft.

Proj Trafos in $\mathbb{C}P^1$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0$$

__Bew__ $(A, B; C, D) \in \mathbb{R} \iff (TA, TB; TC, TD) \in \mathbb{R}$

Proj Trafos in $\mathbb{C}P^1$ führen Kreise und Geraden in Kreise und Geraden über

Nächstes Ziel: Verknüpfung von $\mathbb{RP}^2$ und $\mathbb{CP}^1$

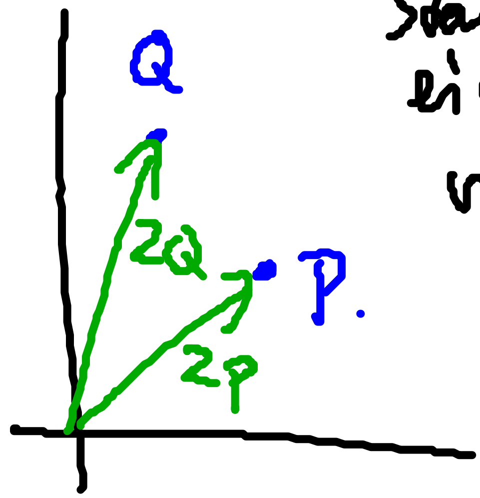
Vorteile von $\mathbb{RP}^2$: Geraden sind gut repräsentiert, Inzidenz, Kegelschnitte

Vorteil von $\mathbb{CP}^1$: Kreise sind gut repräsentiert

Trick: Zwei spezielle Punkte mit denen „formal" gerechnet wird

$$I = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Standardeinbettung von $\mathbb{RP}^2$

$$[P, Q, I] = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & -i \\ b_1 & b_2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = a_2 - ib_1 - a_1 + ib_2$$

$$= (a_2 + ib_2) - (a_1 + ib_1) = z_Q - z_P$$

Übersetzung von Kozirkularität von $\mathbb{C}P^1$ nach $\mathbb{R}P^2$

A, B, C, D kozirkular oder kollinear in $\mathbb{C}P^1$

$$\Longleftrightarrow (A,B;C,D) \in \mathbb{R}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{[AC][BD]}{[AD][BC]} \in \mathbb{R}$$

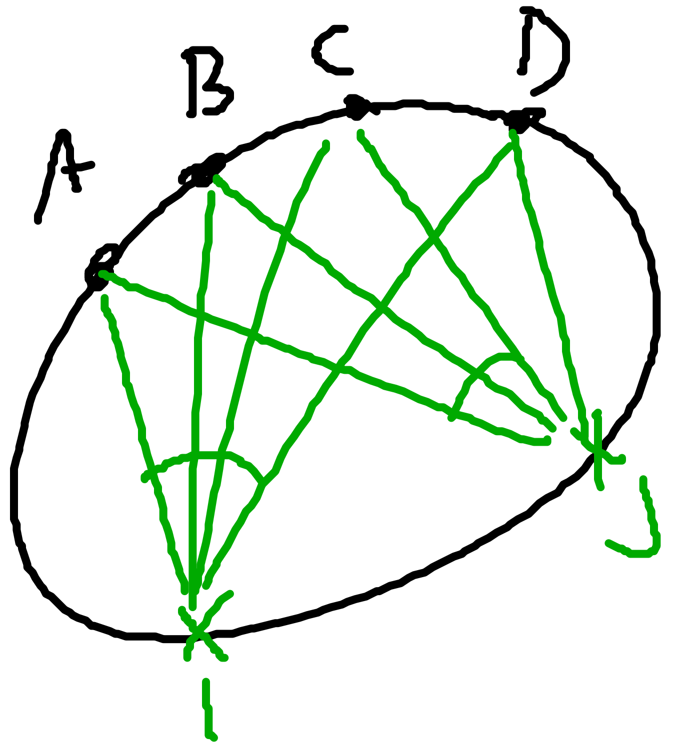
$$\Longleftrightarrow \frac{[AC][BD]}{[AD][BC]} = \frac{\overline{[AC]}\,\overline{[BD]}}{\overline{[AD]}\,\overline{[BC]}}$$

Bem.: $[AC] = \begin{pmatrix} z_A & z_C \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = z_A - z_C$

$\mathbb{C}P^1 \rightsquigarrow \mathbb{R}P^2$

$$\Longleftrightarrow \frac{[ACI][BDI]}{[ADI][BCI]} = \frac{[ACJ][BDJ]}{[ADJ][BCJ]}$$

$$\Longleftrightarrow (A,B;C,D)_I = (A,B;C,D)_J$$



$ABCDIJ$ auf KS

Kreise sind Kegelschnitte durch I und J