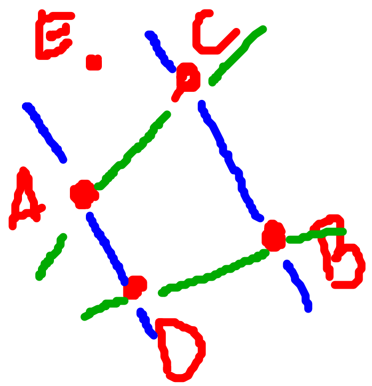
Letztes Mal: Quadriken

- Lösungsgebilde von quadratischen Gleichungen

$$ax^2+by^2+2cxy+2dxz+2eyz+fz^2=0$$

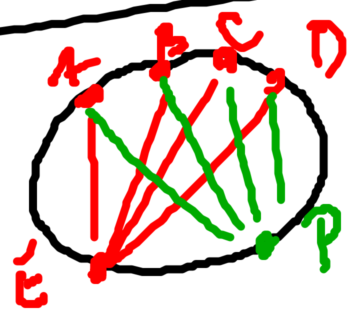
$$(x,y,z)\begin{pmatrix}a&c&d\\c&b&e\\d&e&f\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0$$

- Durch 5 Punkte von denen keine 4 auf einer Geraden liegen geht eine (eindeutige) Quadrik
- Inklusive Berechnungsverfahren:



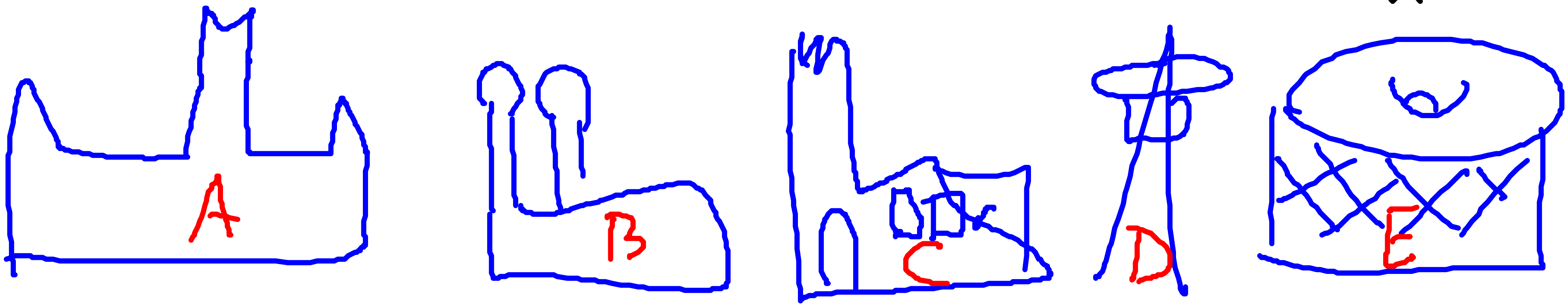
$$\underset{\uparrow\,[ADE][BCE]}{\lambda}\cdot[ACP][BDP]+\underset{\uparrow\,-[ACE][BDE]}{\mu}\cdot[ADP][BCP]=0$$

$\boxed{\text{Plückers } \mu}$

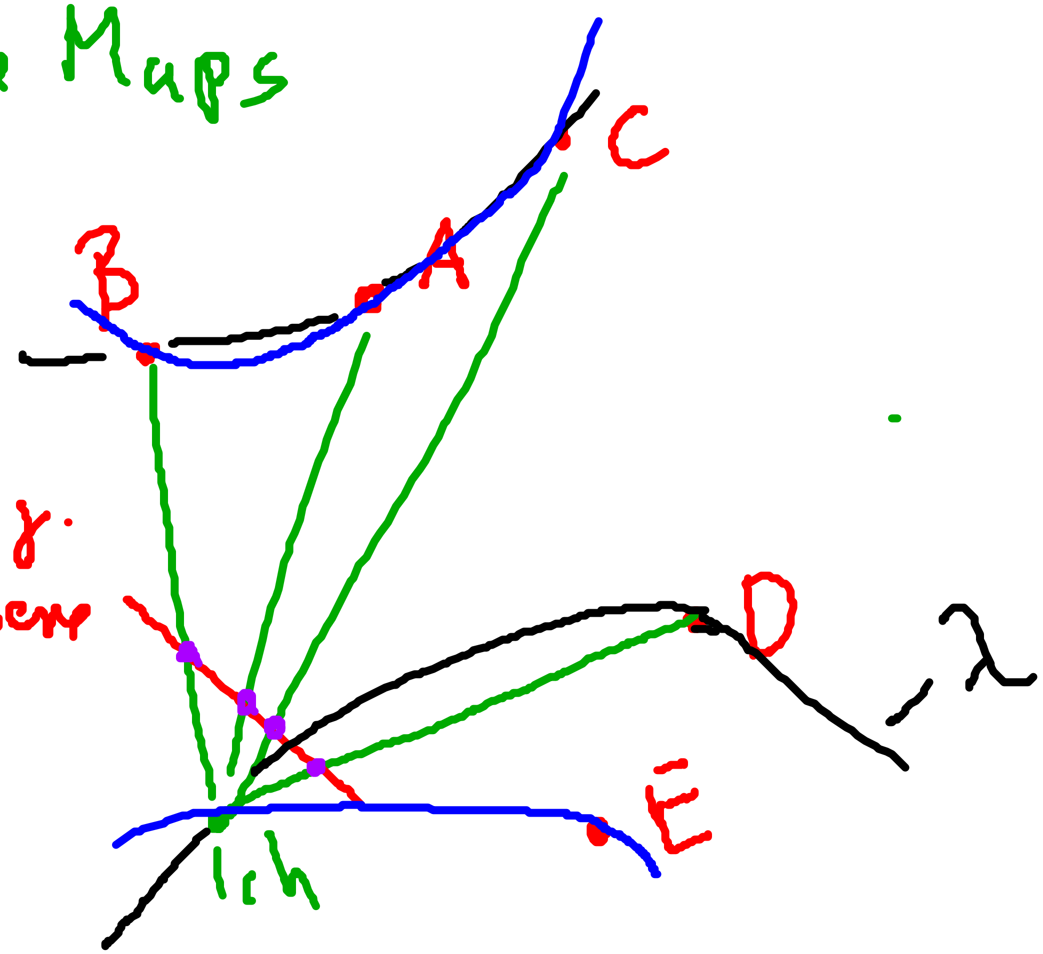


- Doppelverhältnisse $(AB;CD)_P=(AB;CD)_E$

„From where has a picture been taken



Google Maps



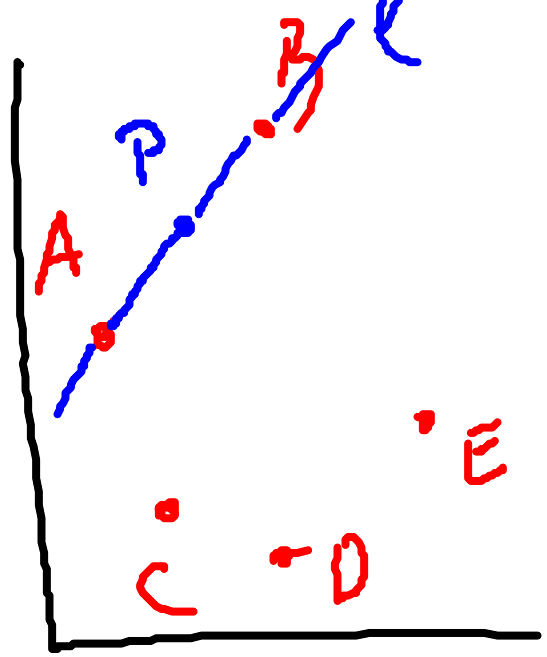
Ich „sehe' $(A,B;CD)_{Ich} = \lambda$

unter gewissem DV

$(A,B;CE)_{Ich} = \mu$

Eindeutigkeit einer Quadrik durch 5 Punkte in allg. Lage

<u>Satz</u> Seien $A - E$ 5 Punkte im $\mathbb{RP}^2$ von denen keine 3 auf einer Geraden liegen. Dann ist die Quadrik durch $A - E$ eindeutig.



<u>Bew</u> (Skizze) angenommen es gibt 2 Quadriken $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ durch $A - E$. Für alle μ, λ mit $\lambda \neq 0$ und $\mu \neq 0$ ist $\lambda \mathcal{C}_1 + \mu \mathcal{C}_2$ wieder Quadrik durch $A - E$.

- Sei P kollinear zu A, B. Dann ex λ, μ mit P liegt auf $\mathcal{C} = \lambda \mathcal{C}_1 + \mu \mathcal{C}_2$ (Plückers μ)
- oBdA liege A, B, P auf Ferngeraden, $z = 0$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}(x,y,0)$ ist quadratische Form (homogen in x, y) mit drei Nullst. A, B, P.

$\Rightarrow \mathcal{C}(x,y,0) \equiv 0$

$\Rightarrow \mathcal{C}(x,y,z) = z \cdot \underbrace{\mathcal{D}(x,y,z)}_{\Rightarrow \text{ linear}}$ $\Rightarrow C, D, E$ ebenso kollinear $\lightning$

Projektive Transformationen von Kegelschnitten

Sei $\tau: \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{RP}^2$ sei proj. Transformation

$p \mapsto M \cdot p$ mit $\det(M) \neq 0$

Bisher: Wie wirkt τ auf Geraden

$$\ell \mapsto (M^{-1})^T \ell$$

wg.

$$\langle \ell, p \rangle = \ell^T p = \ell^T (M^{-1} M) p = ((M^{-1})^T \ell)^T (M \cdot p)$$

Wie wirkt τ auf Quadriken $p^T A p = 0$

$$A \mapsto (M^{-1})^T A (M^{-1})$$

Transformation von $p^T A p = 0$

$$(M \cdot p)^T (M^{-1})^T A (M^{-1}) (Mp)$$

$$= p^T M^T (M^{-1})^T A M^{-1} M p = p^T A p$$

Welche Formen von Quadriken gibt es?
(bis auf proj Transformation)

Sei A die symmetrische 3×3 Matrix in der Quadrik $p^T A p = 0$

Aus der LA II Hauptachsen Transformation:
Es ex $S \in O(\mathbb{R},3)$ mit
$$\underbrace{S^T A S}_{\text{proj Trafo. von } A} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$
$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 0$

Weiterhin: Falls $\alpha \neq 0$
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$
mit $\sigma_1 = \begin{cases} +1, & \alpha > 0 \\ -1, & \alpha < 0 \end{cases}$

Analog mit β, γ. Bis auf proj. Trafo $\alpha, \beta, \gamma \in \{-1, 0, +1\}$

Weiterhin
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & & \\ & \alpha & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$
Dadurch sind α, β, γ Permutierbar

Weiterhin
$A, -A$ repräsentieren gleiche Quadrik.

Alle möglichen Formen von Quadriken bis auf proj. Trafo.

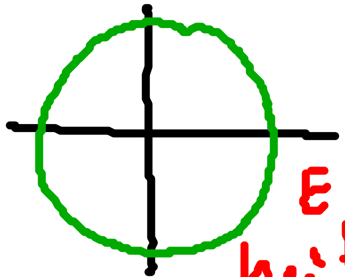
$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$x^2+y^2+z^2=0$

hat keine Lösungen in $\mathbb{RP}^2$
nur komplexe Lösungen

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$x^2+y^2-z^2=0$



Einheits-kreis

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$x^2+y^2=0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ \lambda \end{pmatrix}$

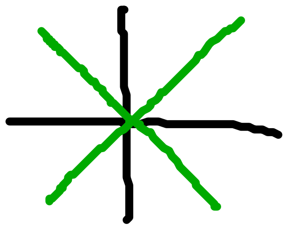
Zwei komplex konjugierte Geraden
(ein reeller Punkt)

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$x^2-y^2=0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix}$

Zwei Reelle Geraden



$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

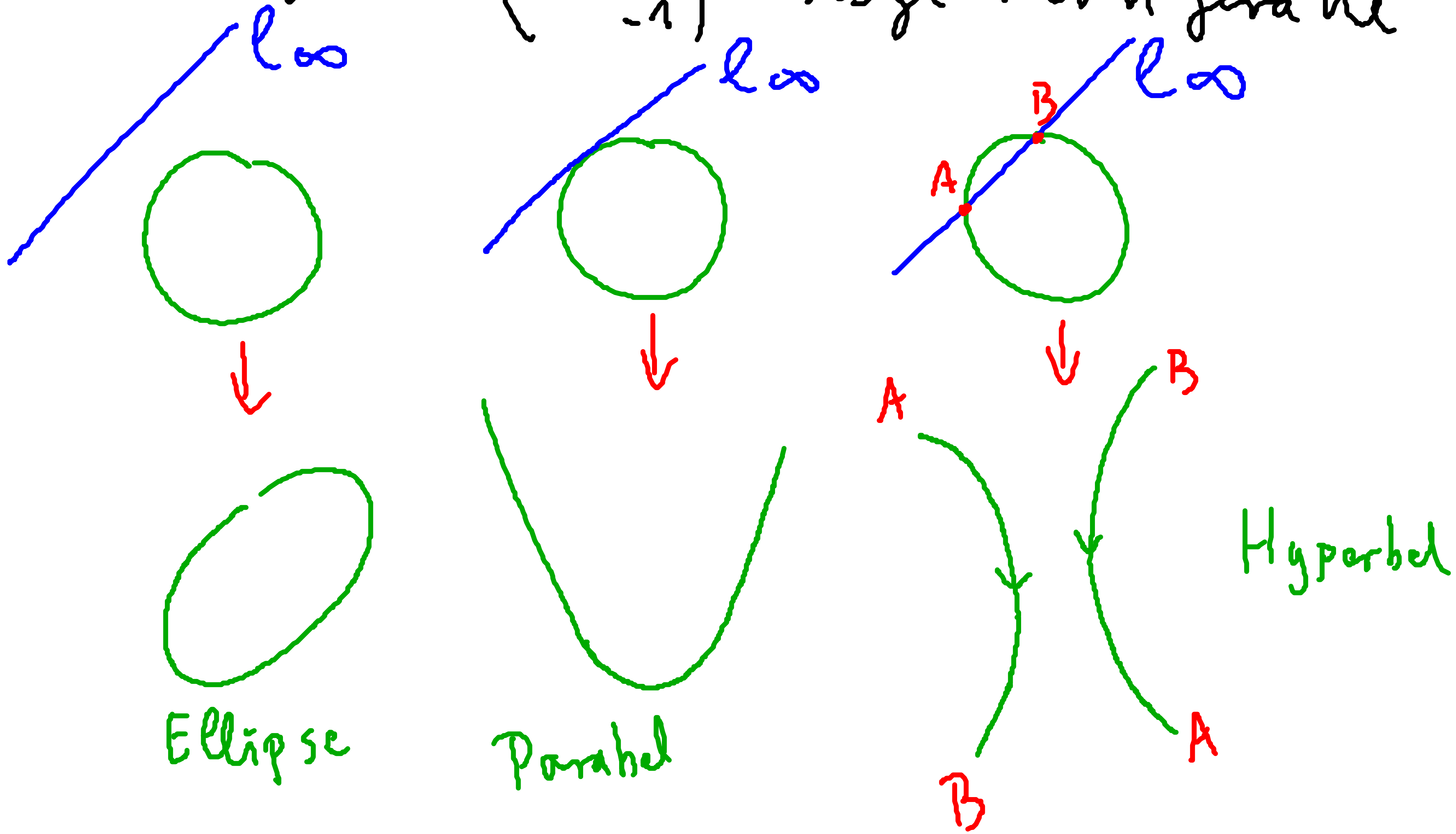
$x^2=0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

reelle Doppelgerade

Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln

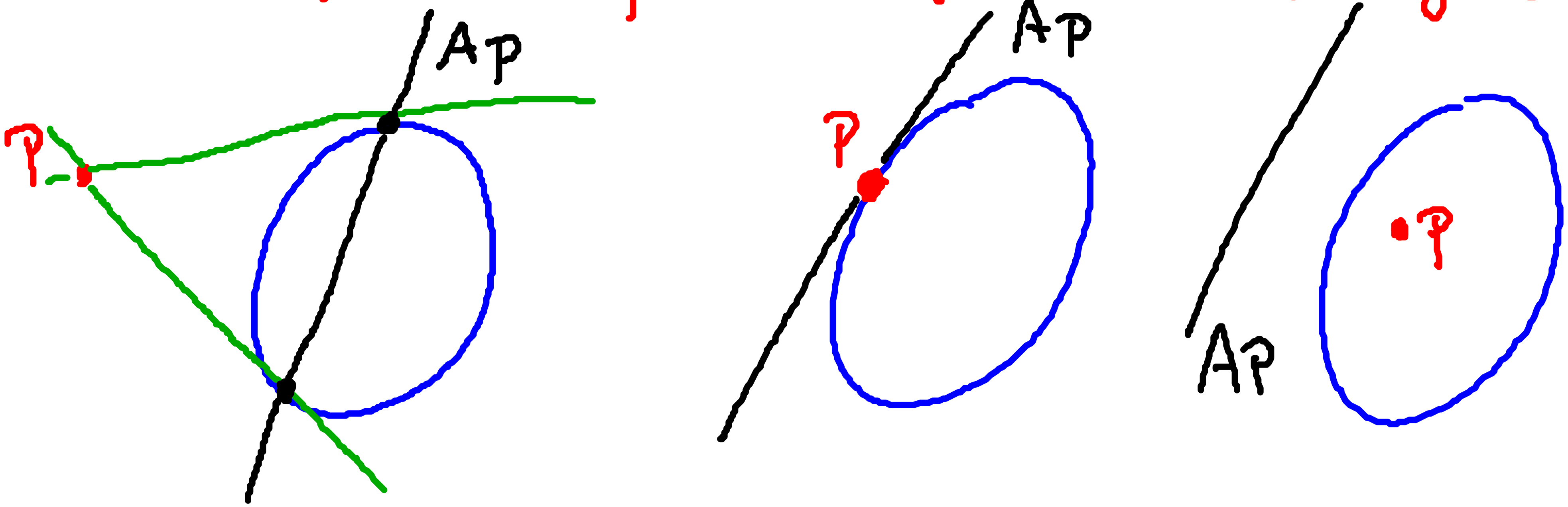
Wie liegt ein „Kreisartiger" KS mit Normalform $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$ bzgl Ferngerade



Kleiner Ausflug (ohne Beweis): Polare

Sei A eine zu einer Quadrik gehörige Matrix mit $\det(A) \neq 0$ (d.h. Quadrik ist nicht degeneriert)
Sei p ein Punkt im $\mathbb{R}P^2$.

Was ist Ap interpretiert als Gerade



Man nennt Ap die Polare von p bzgl. A

Dualität aus Kap ② ist Polarität bzgl $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$