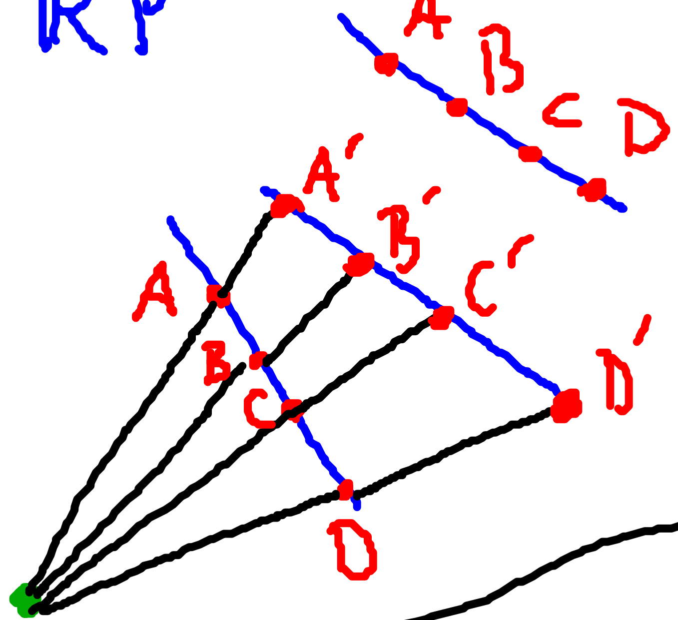
Letztes Mal: Doppelverhältnisse + harmonische Punktequadrupel

$\mathbb{RP}^1$

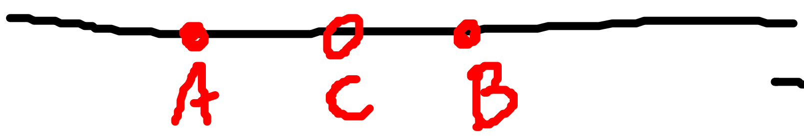


$$(A B ; C D) = \frac{[AC][BD]}{[AD][BC]}$$ ← Projektive Invariante

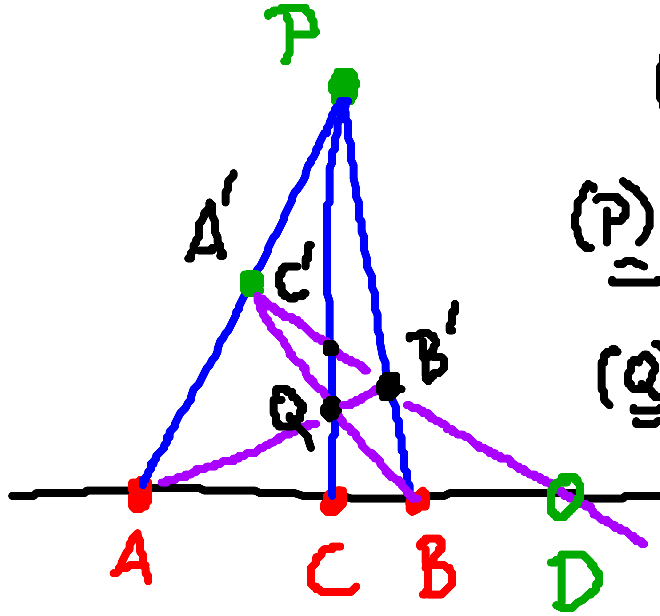
$$(A B ; C D) = (A' B' ; C' D')$$

$\{\{A,B\},\{C,D\}\}$ in harmonischer Lage

$$\Leftrightarrow (A,B;C,D) = -1$$



$\to D = \infty$

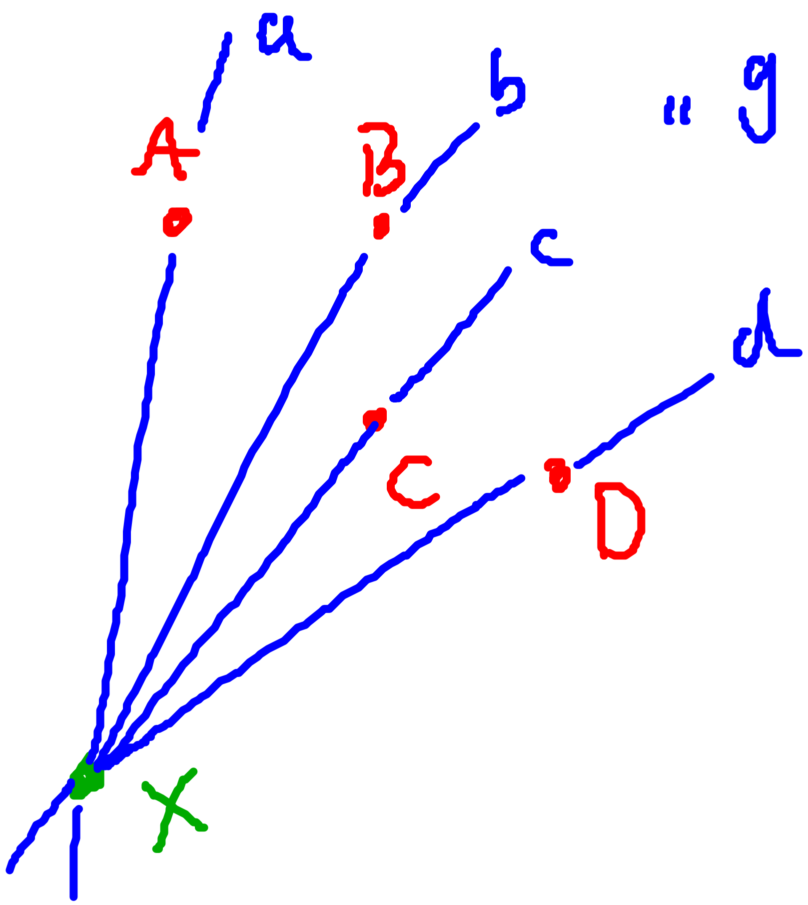


$$(AB;CD) \overset{(P)}{=} (A'B';C',D) \overset{(Q)}{=} (BA;C,D) = \frac{1}{(AB;CD)}$$

$$(AB;CD) = -1$$

Ein Begriff der gleich wichtig werden wird $\mathbb{RP}^2$

Doppelverhältnis von vier Punkten im $\mathbb{RP}^2$
„gesehen" vom Punkt X



$$(A\,B;C\,D)_X := (a,b;c,d) = \frac{[XAC][XBD]}{[XAD][XBC]}$$

Frage: Welche Punkte Y sehen A,B,C,D unter gleichem DV wie X: $(A,B;C,D)_X = (A,B;C,D)_Y$

5 Quadriken (Kegelschnitte)

Quadriken sind Lösungsgebilde von quadratischen Gleichungen in zwei Variablen

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$$

nicht homogen

$$(x, y, 1)\begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

In homogenen Koordinaten:

$$Q(x,y,z) = (x, y, z)\begin{pmatrix} a & c & d \\ c & b & e \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$Q(x,y,z)$ symmetr. Matrix

$P = (x,y,z)^T$

$$\boxed{Q(P) = P^T A P}$$

$$Q(x,y,z) = a x^2 + b y^2 + 2c xy + 2d xz + 2e yz + f z^2 = 0$$

Spezielle degenerierte Quadriken

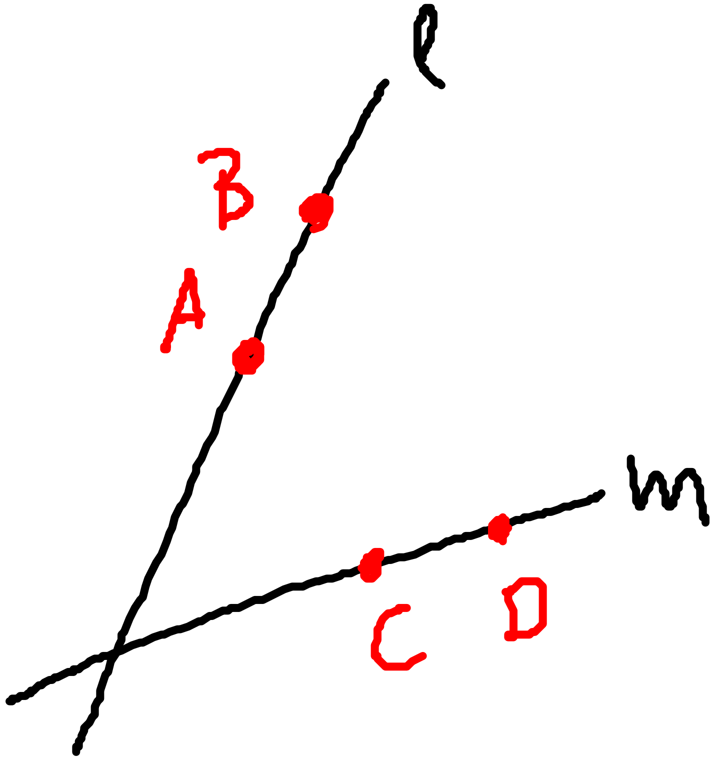
Wann zerfällt $Q(p)$ in das Produkt zweier linearen Gleichungen.

$$Q(p) = \underbrace{(r_1 x + s_1 y + t_1 z)}\,\underbrace{(r_2 x + s_2 y + t_2 z)}$$

$$= \langle l, p \rangle \cdot \langle m, p \rangle$$

homogene Koordinaten für Geraden

Wird 0 wenn p auf l oder auf m liegt.



$$Q(p) = [A B p][C D p]$$

$$l = A \times B$$

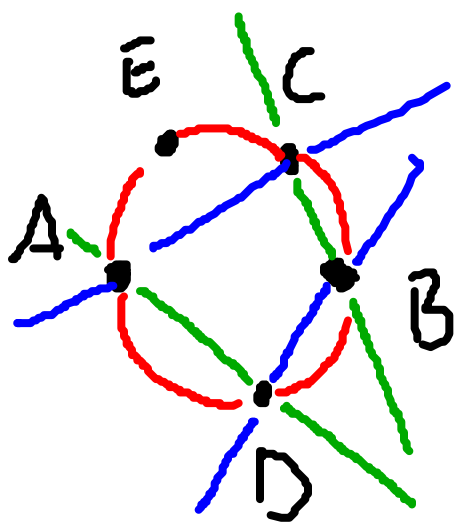
$$\langle l, p \rangle = \langle A \times B, p \rangle = [A B p]$$

$$m = C \times D$$

$$\langle m, p \rangle = \langle C \times D, p \rangle = [C D p]$$

Satz Durch fünf Punkte, von denen keine 4 auf einer Geraden liegen, kann man immer eine Quadrik durchlegen
(eindeutige; Bew später)

Wegen [ ] finde ich vier Punkte A, B, C, D von denen keine 3 auf einer Geraden liegen (elementare Kombinatorik)



$$\underbrace{[A\,D\,P][B\,C\,P]}_{Q_2(P)}=0$$

$$\underbrace{[A\,C\,P][B\,D\,P]}_{Q_1(P)}=$$

$$Q_{\lambda,\mu}(P) := \lambda\, Q_1(P) + \mu\, Q_2(P)$$

Quadratische Polynom durch A, B, C, D

Für welche λ, μ geht $Q_{\lambda,\mu}(P)$ auch durch Punkt E?

Wähle: $\lambda = Q_2(E)$, $\mu = -Q_1(E)$

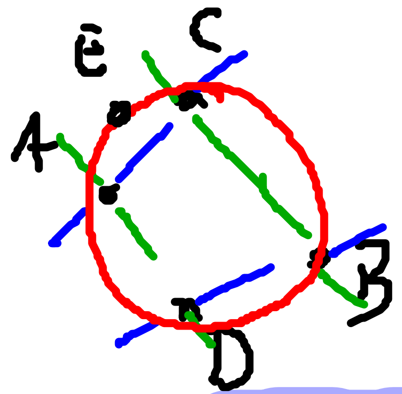
Probe: $Q_{\lambda,\mu}(E) = Q_2(E)\,Q_1(E) - Q_1(E)\,Q_2(E) = 0$

Plückers μ

Geschlossene Form für $Q(p)$ als Quadrik durch A, B, C, D, E

$$Q(p) := [ADE][BCE][ACP][BDP] - [ACE][BDE][ADP][BCP]$$

Mit anderen Worten: $ABCDEP$ liegen auf gemeinsamen Quadrik wenn $\qquad = 0$



Umformuliert: $[ADE][BCE][ACP][BDP] = [ACE][BDE][ADP][BCP]$

$$\frac{[ACP][BDP]}{[ADP][BCP]} = \frac{[ACE][BDE]}{[ADE][BCE]}$$

$$(AB;CD)_P = (AB;CD)_E$$