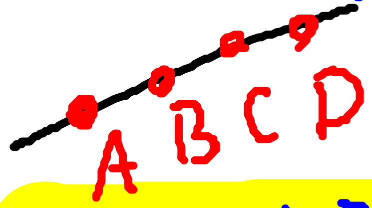
Letztes Mal: Doppelverhältnisse

Zutaten: 2-dimensionale homogene Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ als Koordinaten für die 1-dim. proj.-Gerade $\mathbb{RP}^1$

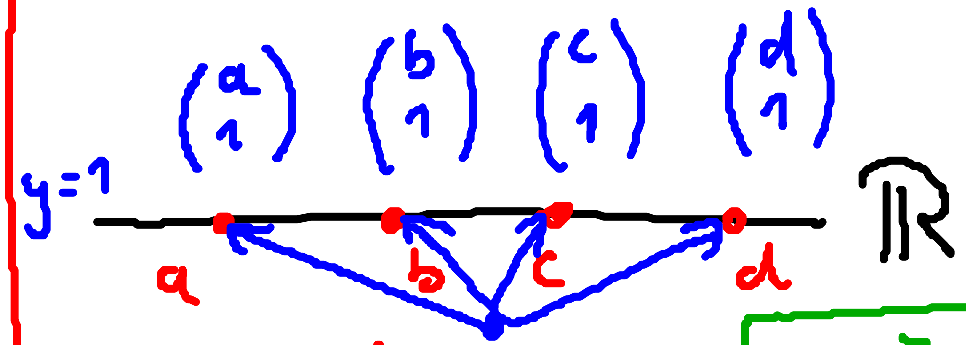
- $[a,b] := \det\begin{pmatrix} | & | \\ a & b \\ | & | \end{pmatrix}$

Doppelverhältnis:



$$\boxed{(A,B;C,D) := \frac{[AC][BD]}{[AD][BC]}}$$

Oftmals in der Literatur:



$$\frac{(a-c)}{(a-d)} \Big/ \frac{(b-c)}{(b-d)} = \frac{(a-c)\,(b-d)}{(a-d)\,(b-c)} = \frac{\begin{bmatrix} a & c \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & d \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} a & d \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & c \\ 1 & 1 \end{bmatrix}} \leftarrow \text{Das ist unser DV}$$

$$\begin{bmatrix} a & c \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = a - c$$

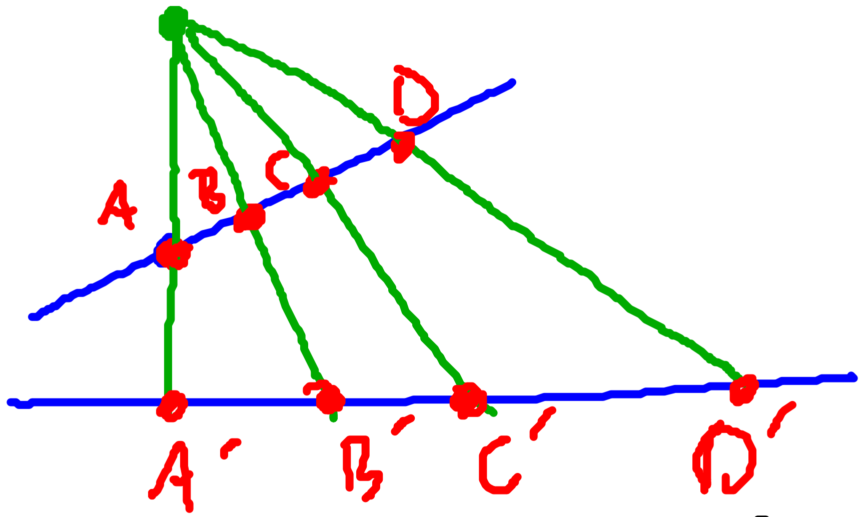
Lemma 1 DV ist invariant unter Multiplikation der homogenen Koordinaten mit Faktor $\lambda \neq 0$

Lemma 2 DV ist invariant unter proj. Transformationen

$$p \mapsto M \cdot p$$

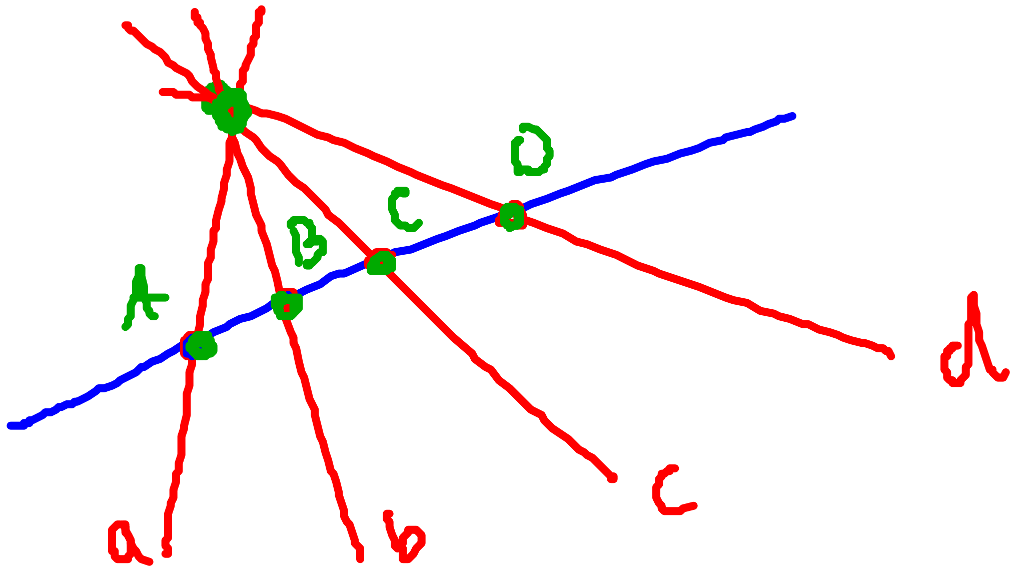
• Insbesondere ist das DV unabhängig von der konkreten Wahl einer Basis des $\mathbb{RP}^1$. Also kann man von dem Doppelverhältnis reden.

• DV ist invariant unter perspektivischen Trafos



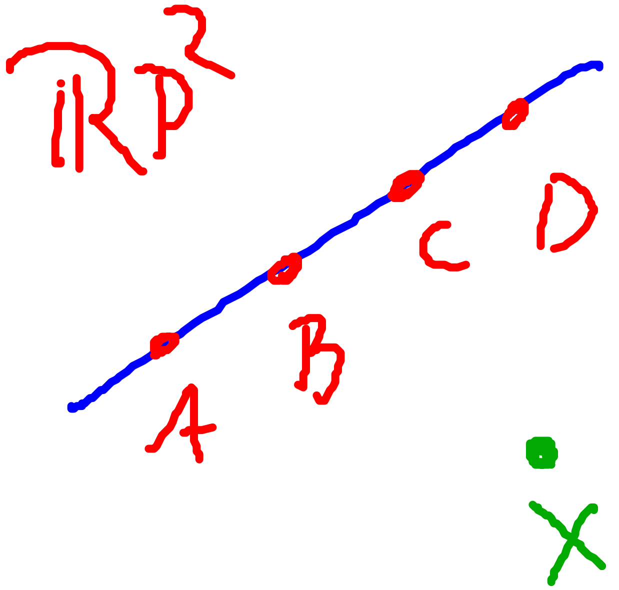
$$(A\,B;C\,D) = (A'B', C'D')$$

• DV von vier Geraden durch einen Punkt



$$(a,b;c,d) := (A,B;C,D)$$

Doppelverhältnisse direkt aus homog. Koordinaten im $\mathbb{RP}^2$ berechnen.

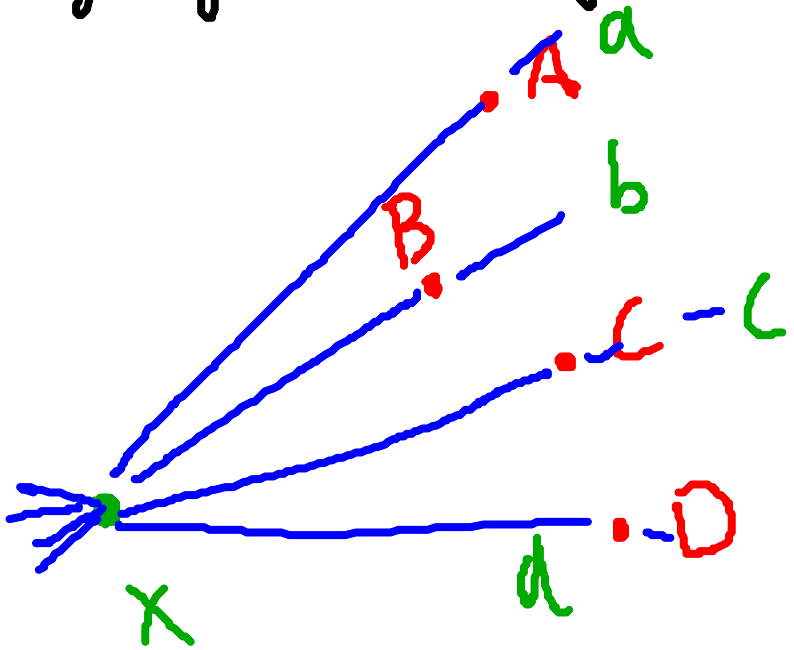


$$(A,B;C,D) = \frac{[XAC]\,[XBD]}{[XAD]\,[XBC]}$$

$$[X\,Y\,Z] := \det\begin{pmatrix} | & | & | \\ X & Y & Z \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Bew: → Übung

Begriff wichtig fürs später:



$$(A,B;C,D)_X := \frac{[XAC]\,[XBD]}{[XAD]\,[XBC]} = (a,b;c,d)$$

DV von A, B, C, D „gesehen" von X

Wann gilt $(A,B;C\,D)=1$

$$\frac{[AC][BD]}{[AD][BC]}=1$$

Satz: $(A\,B;C\,D)=1$ g.d.w. $A=B$ oder $C=D$

„$\Leftarrow$" $\frac{[AC][BD]}{[AD][BC]}=1$ „sieht man"

$\Rightarrow$ „selbermachen"

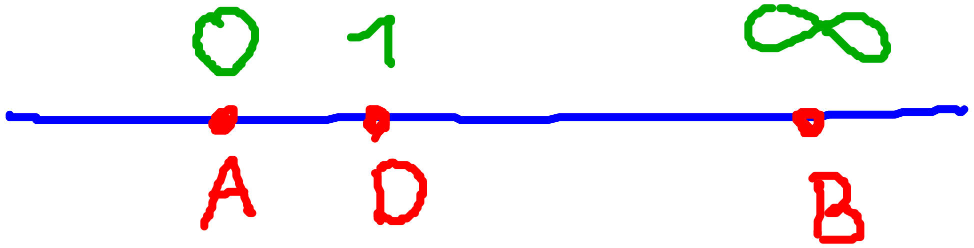
Richtiges Rechnen mit „∞" (tritt auf bei $(A\,B;C\,A)=\frac{[AC][BA]}{\underbrace{[AA]}_{=0}[BC]}$)

Rechenregeln

$\frac{1}{0}=\infty$, $\frac{1}{\infty}=0$, $\infty+1=\infty$, $\infty+\infty=\infty$

Nicht erlaubt: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ ist nicht definiert)

Spezielle Doppelverhältnisse



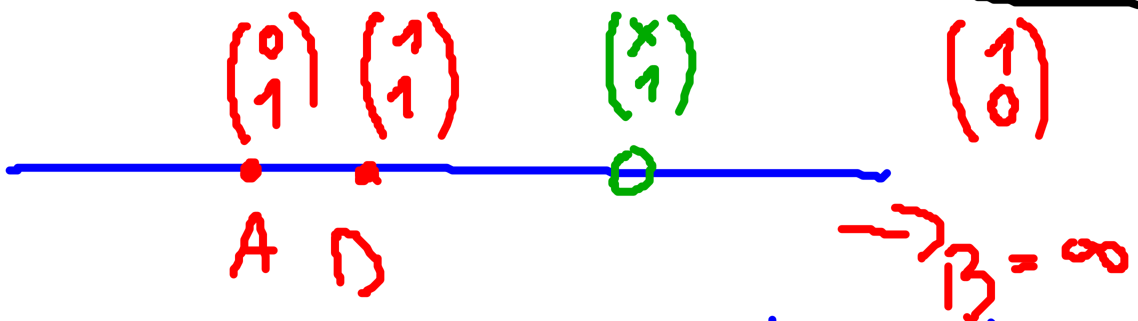
Projektive Skala bei der A D B die Rolle von 0, 1, ∞ haben.

$$(A,B;A,D) = \frac{[A\,A]\,[B\,D]}{[A\,D]\,[B\,A]} = 0$$

$$(A,B;D,D) = \frac{[A\,D]\,[B\,D]}{[A\,D]\,[B\,D]} = 1$$

$$(A,B;B,D) = \frac{[A\,B]\cdot[B\,D]}{[A\,D]\,[B\,B]} = \infty$$

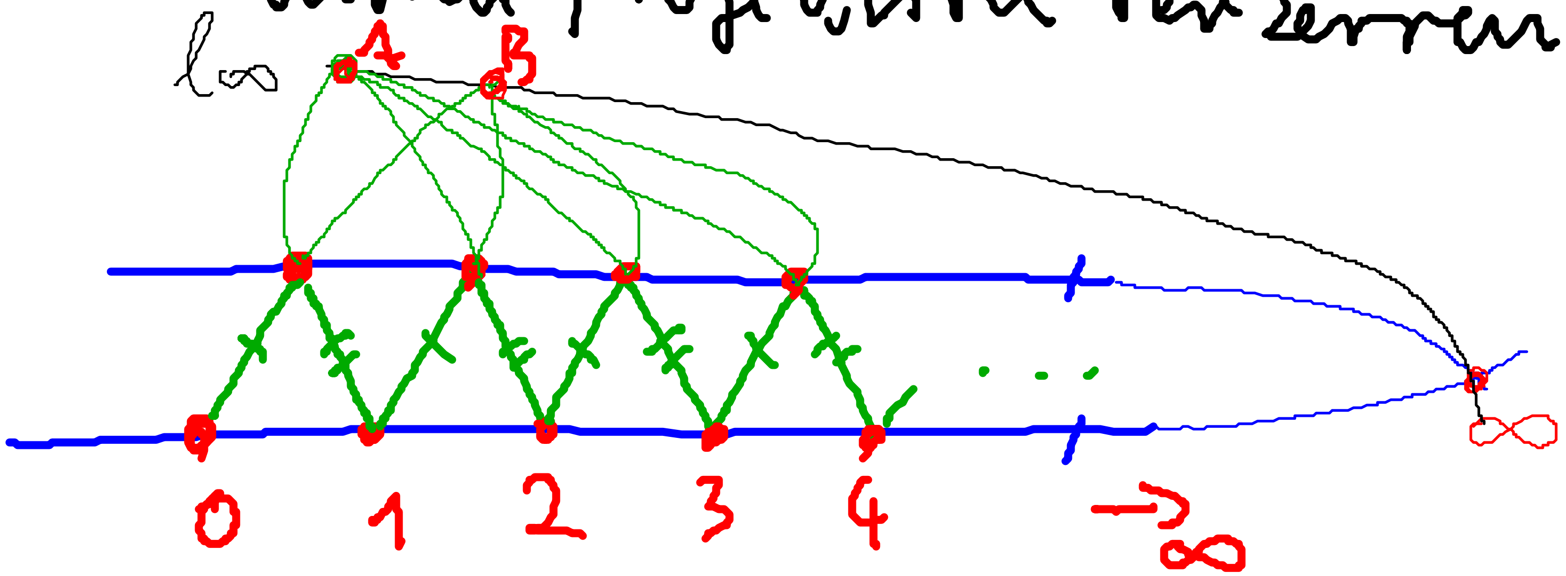
Was passiert wenn A, B, D „wirklich" auf 0, 1, ∞ liegen?

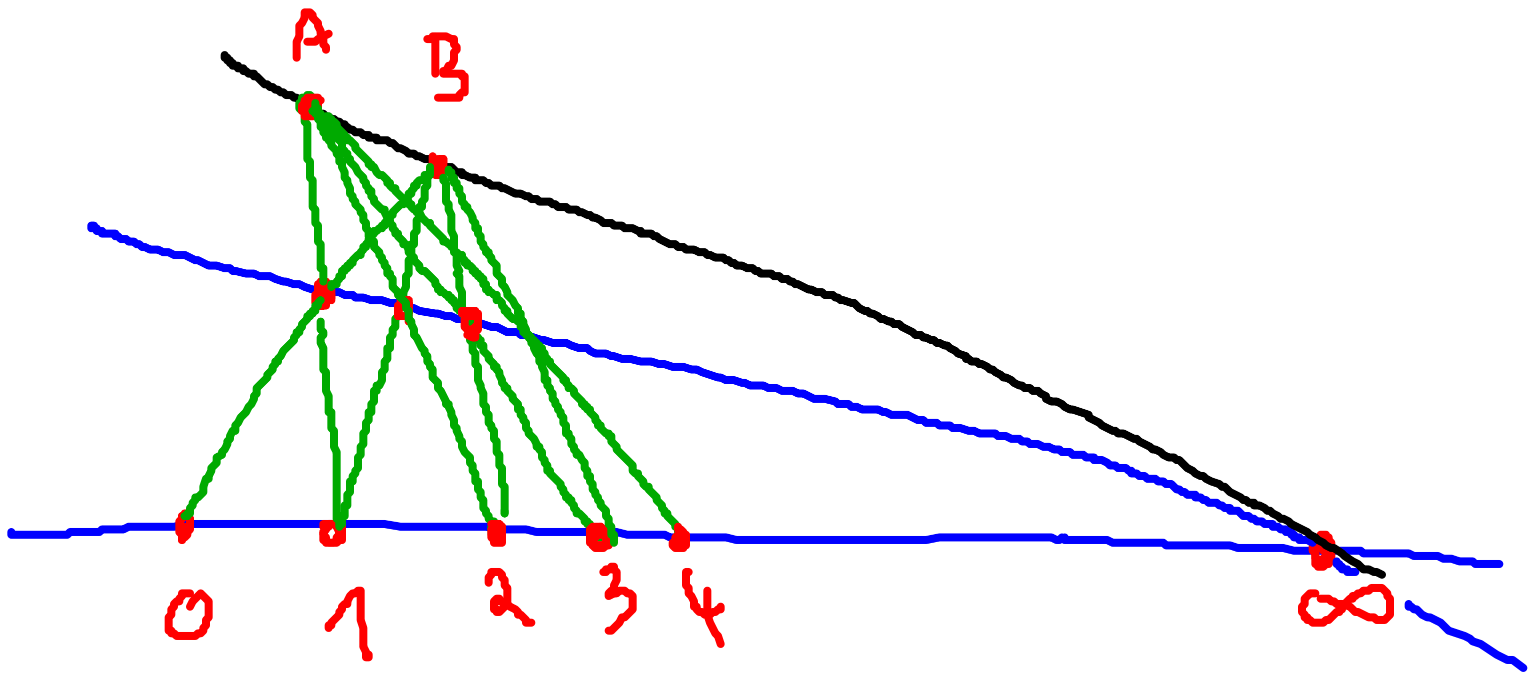


$$(A,B;X,D) = \frac{\begin{bmatrix}0 & x\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}} = \frac{(-x)\cdot(1)}{(-1)\cdot(1)} = X$$

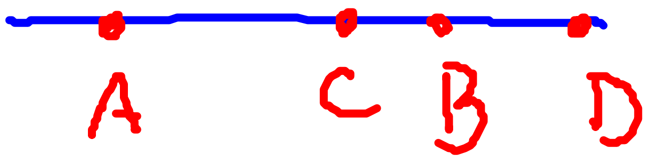
Dies ermöglicht die Rekonstruktion des Zahlenstrahls auf Projektiv verzerrten Skalen.

Konstruktion einer Äquidistanten Skala unter Projektiven Verzerrungen:





Harmonische Punktequadrupel



$\{\{A,B\},\{C,D\}\}$ heißt in harmonischen Lage wenn $(AB;CD)=-1$

Harmonische Lage hängt tatsächlich nur von obigen Mengen ab.

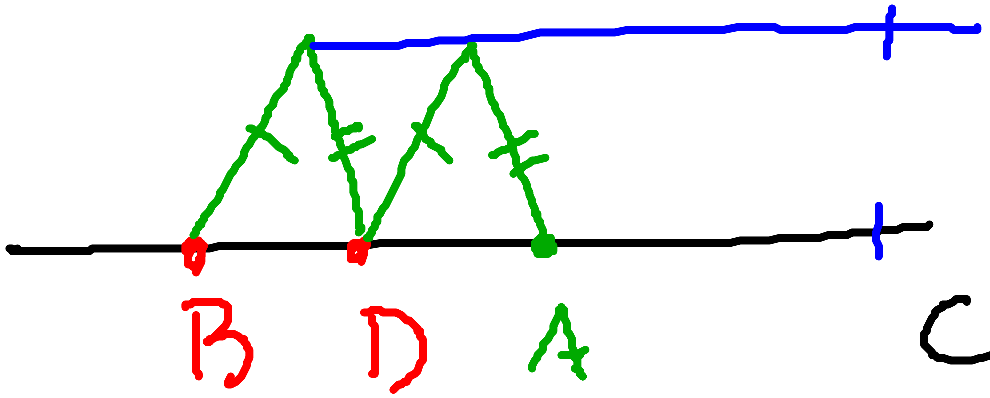
$$(A,B;C,D) = \frac{1}{(B,A;C,D)} = \frac{1}{(A,B;D,C)}$$

Also folgt aus $(AB;CD)=-1$ dass

$$(BA;CD)=(AB;DC)=1$$

Ferner gilt: $(AB,CD)=(CD,AB)$

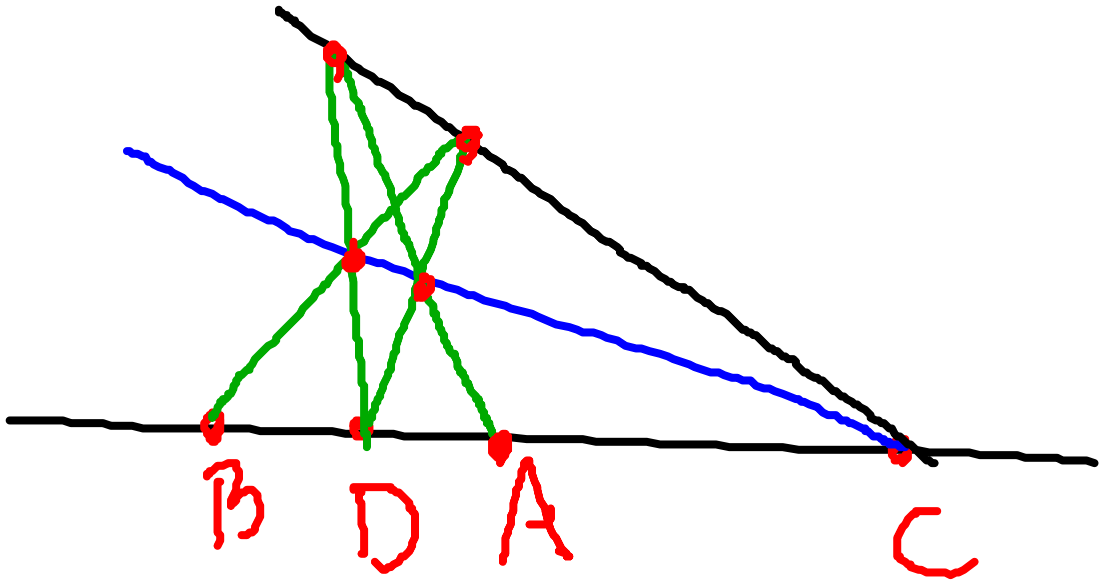
Konstruktion für Punkt A mit $(AB, CD) = -1$ aus B, C, D



$C \to \infty$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$(AB; CD) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{(-1)(-1)}{(1)(-1)} = -1$$



$(AB, CD) = -1$