Letztes Mal: Projektive Transformationen

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}} = \frac{\mathbb{R}^3 - \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}}{\mathbb{R}-\{0\}}$$ ← Punktemenge

$P = \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]$ Punkt ; $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 - \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ Repräsentant

Projektive Abb. $\tau_M : \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$

wird repräsentiert durch $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ; $\det(M) \neq 0$

$$\tau_M\left(\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]\right) = \left[M \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]$$ ← Das ist wohldefiniert

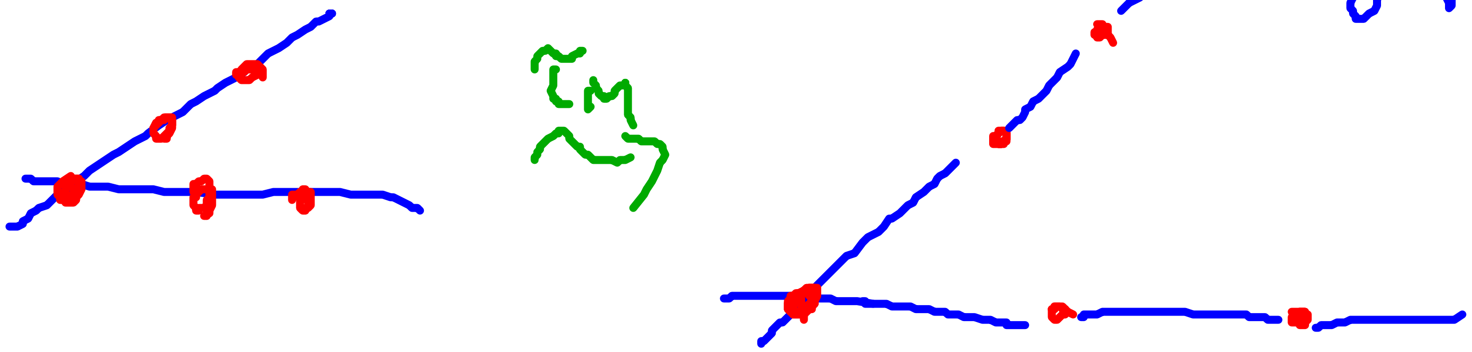
M und $\lambda M$ erzeugen gleiche Abbildungen $\tau_M = \tau_{\lambda M}$ wenn $\lambda \neq 0$

Oder etwas vereinfacht auf Repräsentantenebene:

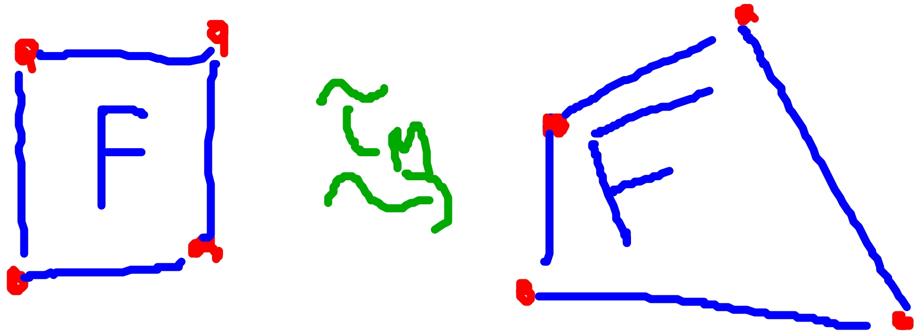
$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mapsto M \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

# Eigenschaften von proj Transformationen

- Kollineare Punkte werden wieder in kollineare Punkte übergeführt



- M ist (bis auf Vielfache) durch Bild und Urbild von vier Punkten (von denen keine drei kollinear sind) eindeutig bestimmt.



$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

<u>Satz</u> Es seien $[A], [B], [C], [D]$ Punkte von denen keine 3 kollinear sind. Und $[A'], [B'], [C'], [D']$ ebenso.
Dann gibt es genau ein $[M]$ mit
$$[M \cdot A] = [A'], [M \cdot B] = [B'], [M \cdot C] = [C'], [M \cdot D] = [D'].$$

<u>Bew</u> Zunächst betrachte Spezialfall $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

In diesem Fall:
$$M = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda \cdot A' & \mu B' & \tau C' \\ | & | & | \end{pmatrix} \qquad \lambda \neq 0, \mu \neq 0, \tau \neq 0$$

$$M \cdot D = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda A' & \mu B' & \tau C' \\ | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ D' \\ | \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} | & | & | \\ A' & B' & C' \\ | & | & | \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} | \\ D' \\ | \end{pmatrix}$$

Eindeutig lösbares Lineares Gleichungssystem wg. $\det(A' B' C') \neq 0$
$\lambda, \mu, \tau \neq 0$ wg. nichtdeg.-Bedingung

# Allgemeinen Fall

$$\begin{tikzcd}
{[A],[B],[C],[D]} \arrow[rr, bend right, "M_1 \cdot M_2^{-1}"'] & {\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right],\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right],\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right],\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]} \arrow[l, bend right, "M_2"'] \arrow[r, bend left, "M_1"] & {[A'],[B'],[C'],[D']}
\end{tikzcd}$$

Wie wirken proj Transformationen auf Geraden

Sei $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ proj Abb. (auf Punktebene)

Punkt $a$ wird abgebildet auf $M\cdot a$

Seien $a, b, c$ kollinear d.h $\exists \ell$ mit $\langle a,\ell\rangle = \langle b,\ell\rangle = \langle c,\ell\rangle = 0$

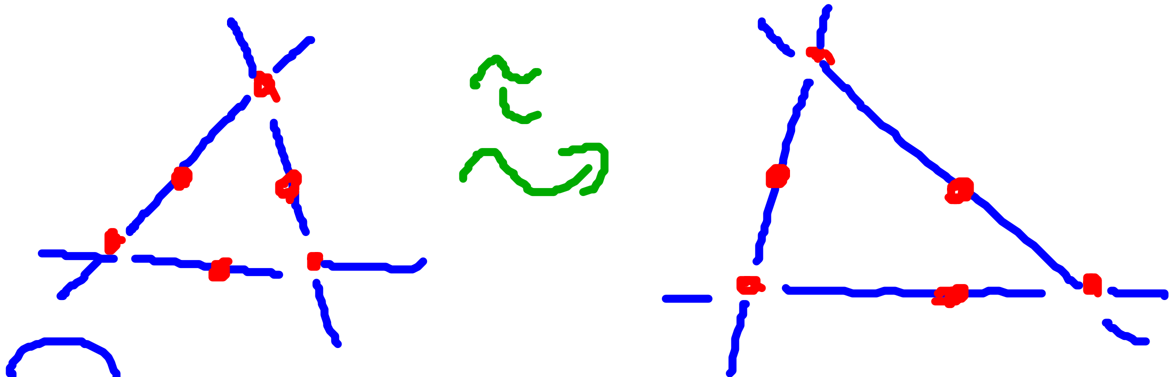
dann ex $\ell'$ mit $\langle Ma,\ell'\rangle = \langle Mb,\ell'\rangle = \langle Mc,\ell'\rangle = 0$

---

**Beh:** Bild von $\ell$ unter proj Abb $\tau_M$ ist $(M^T)^{-1}\ell$

**Bew** $\langle Ma, (M^T)^{-1}\ell\rangle = a^T \underbrace{M^T \cdot (M^T)^{-1}}_{=id} \ell = a^T \ell = \langle a, \ell\rangle$

Def: Kollineation ist eine bijektive Abb $\mathbb{P} \to \mathbb{P}$ die kollineare Punkte wieder auf kollineare Punkte abbildet.



<u>Satz</u> (i) in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ ist jede Proj-Transformation Kollineation (Bew von letzter Stunde)

(ii) in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ ist jede Kollineation eine projektive Transfo. (Bew: wichtig, tief, in PG I)

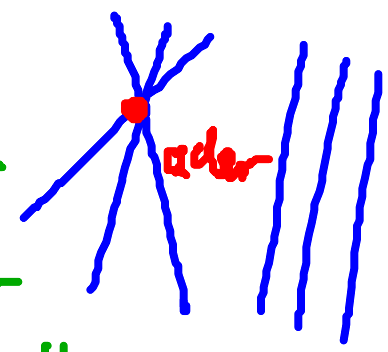
<u>Bem</u> Teil (ii) ist falsch für allgemeine Projektive Ebenen z.B für $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}$ oder $\mathbb{P}_{GF_2}$

# ③ Dualität

Bisherige Ausdruckskraft „unserer Geometrie"

- Punkte
- Kollinearität
- Verbindungsgerade (Join) „$\vee$"

- Gerade
- Konkurrenz
- Schnittpunkt (Meet) „$\wedge$"




- Inzidenz
- proj. Abb. $M$, $(M^T)^{-1}$

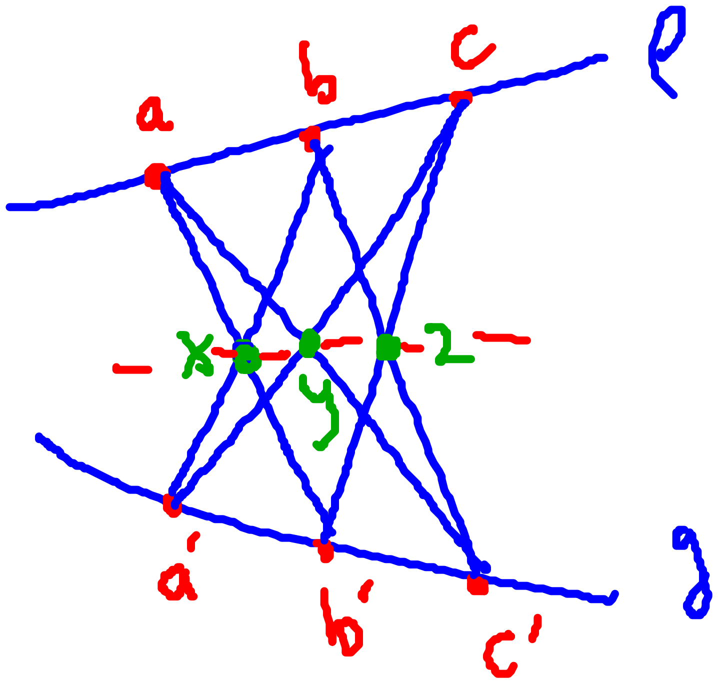
Dualitätsprinzip: Systematisches Vertauschen von Punkt $\Leftrightarrow$ Gerade, Join $\Leftrightarrow$ Meet, Kollinear $\Leftrightarrow$ konkurrent, … führt wahre Sätze in wahre Sätze über.

## Satz von Pappos:

Gegeben zwei Geraden $\ell, g$
2 Punktetripel $(a, b, c)$ und $(a', b', c')$ auf $\ell$ bzw $g$

Bilde:
$$(a \vee b') \wedge (a' \vee b) = x$$
$$(a \vee c') \wedge (a' \vee c) = y$$
$$(b \vee c') \wedge (b' \vee c) = z$$

$\Rightarrow (x, y, z)$ sind kollinear




## Dualer Pappos:

Gegeben zwei Punkte L und G
2 Geradentripel $(A, B, C)$ und $(A' B' C')$ durch L bzw G

Bilde:
$$(A \wedge B') \vee (A' \wedge B) = X$$
$$(A \wedge C') \vee (A' \wedge C) = Y$$
$$(B \wedge C') \vee (B' \wedge C) = Z$$

$\Rightarrow X, Y, Z$ sind konkurrent