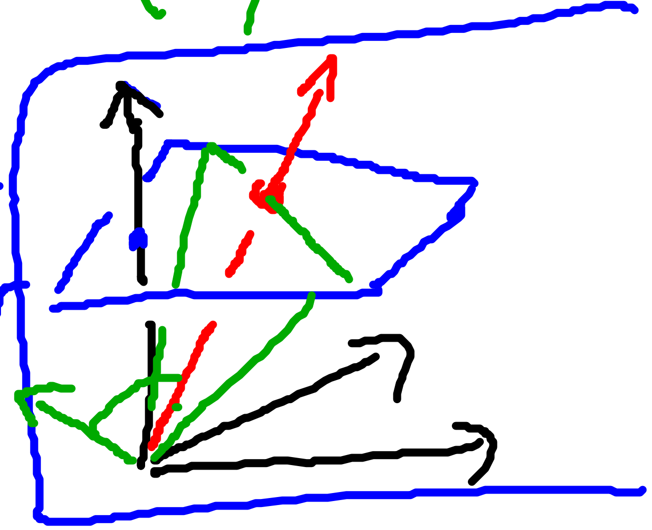
Letztes Mal: homogene Koordinaten

- Stelle Punkte im $\mathbb{R}^2$ als Vektoren im $\mathbb{R}^3$ dar
  - $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$
  - Identifiziere skalare Vielfache $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \sim \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$
  - $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Punkte im Unendlichen



- Stelle Geraden des $\mathbb{R}^2$ als Vektoren im $\mathbb{R}^3$ dar
  - $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| ax + by + c = 0 \right\} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
  - Identifiziere skalare Vielfache $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \sim \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$
  - $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ Gerade im Unendlichen

Punkte:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{R}} := \frac{\mathbb{R}^3 - \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}}{\mathbb{R} - \{0\}}$$

Geraden:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}} := \frac{\mathbb{R}^3 - \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}}{\mathbb{R} - \{0\}}$$

$\mathbb{P}_{\mathbb{R}}$ = Menge von Äquivalenzklassen in $\mathbb{R}^3 - \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$[v] = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ für alle $v \in \mathbb{R}^3 - \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

Homogenisierung:

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{P}_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \mapsto \left[\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}\right]$$

Wir werden im Folgenden nur Operationen betrachten die „stabil" unter Äquivalenzklassenbildung sind

Inzidenz von Punkt und Gerade:

Punkt $[p]$ auf einer Geraden $[\ell]$

$$\underset{\mathbb{P}_{\mathbb{R}}}{[p]} \underset{\text{„liegt auf"}}{I} \underset{\mathbb{L}_{\mathbb{R}}}{[\ell]} \quad :\Longleftrightarrow \quad \langle p, \ell \rangle = 0$$

<u>Satz</u>: Die Relation „liegt auf" ist „wohldefiniert" (d.h. unabhängig von der speziellen Wahl der Repräsentanten)

<u>Bew</u> Sei $[p]=[p']$; $[\ell]=[\ell']$

$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}-\{0\}$ mit $p'=\lambda p$; $\ell'=\mu \ell$

$$\langle p', \ell' \rangle = \langle \lambda p, \mu \ell \rangle = \underbrace{\lambda \cdot \mu}_{\neq 0} \langle p, \ell \rangle$$

$$\Rightarrow \left(\langle p', \ell' \rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle p, \ell \rangle = 0 \right)$$

Man nennt das Tripel

$(\mathcal{P}_{\mathbb{R}}, \mathcal{L}_{\mathbb{R}}, \mathcal{I})$ die reelle projektive Ebene

---

Verbindungsgerade zweier Punkte $[p], [q] \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$

Join: $[p \times q] \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ wenn $[p] \neq [q]$

Schnittpunkt zweier Geraden $[\ell], [m] \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}$

Meet: $[\ell \times m] \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ wenn $[\ell] \neq [m]$

„Verbindung" identischer Punkte

$[p] = [q] \Rightarrow p = \lambda q \qquad p \times q = \lambda q \times q = \lambda (q \times q) = 0$

Repräsentiert keine Gerade

Verschiedene Fälle von Schnittpunkten

Schnitt von Geraden

$l=\left[\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right],\quad m=\left[\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}\right]$

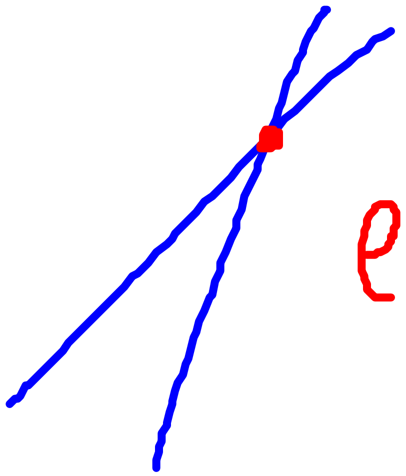
$ax+by+c=0 \qquad dx+ey+f=0$

$$l\times m=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}b&e\\c&f\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}a&d\\c&f\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a&d\\b&e\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$[l]\,\|\,[m] \iff ae=bd \iff ae-bd=0$

$\begin{vmatrix}a&d\\b&e\end{vmatrix}=0$

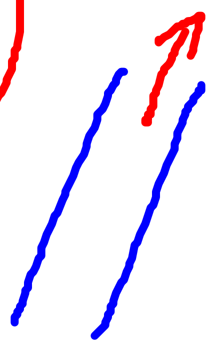
1. Fall: l, m nicht parallel



$$l\times m=\begin{pmatrix}*\\ *\\ \begin{vmatrix}a&d\\b&e\end{vmatrix}\end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix}a&d\\b&e\end{vmatrix}\neq 0$$

Endlicher Punkt

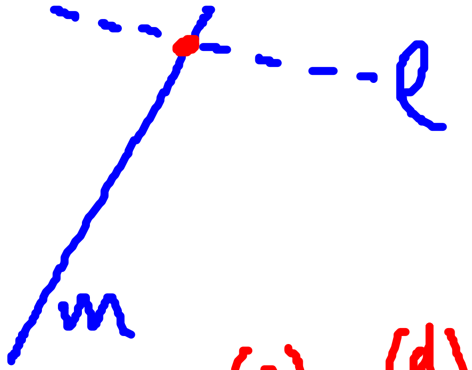
2. Fall: l, m parallel



$$l\times m=\begin{pmatrix}*\\ *\\ 0\end{pmatrix}$$

Fernpunkt in Richtung des Parallelenbüschels

3. Fall: $l=\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$

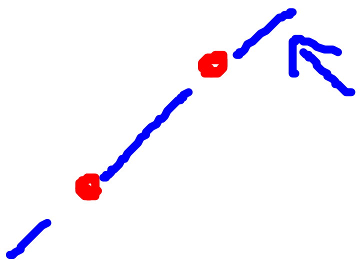


$$l\times m=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}d\\e\\f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}*\\ *\\ 0\end{pmatrix}$$

Fernpunkt auf [m]

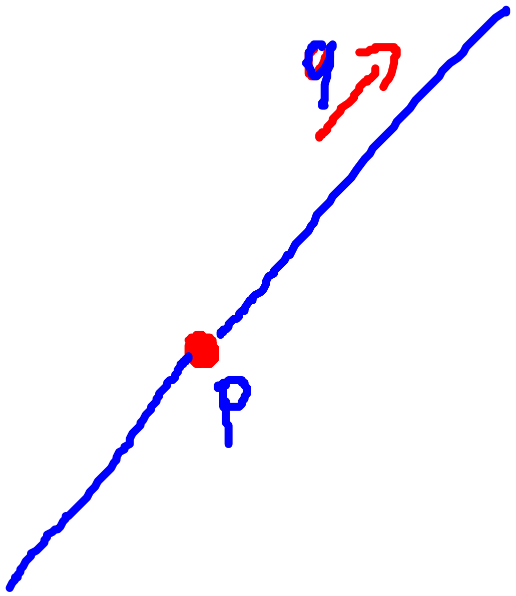
Verbindungsgerade:

1. Fall $[p], [q]$ endliche Punkte



ganz normale endliche Gerade

2. Fall $[p]$ sei endlicher Punkt, $[q]$ ein Fernpunkt

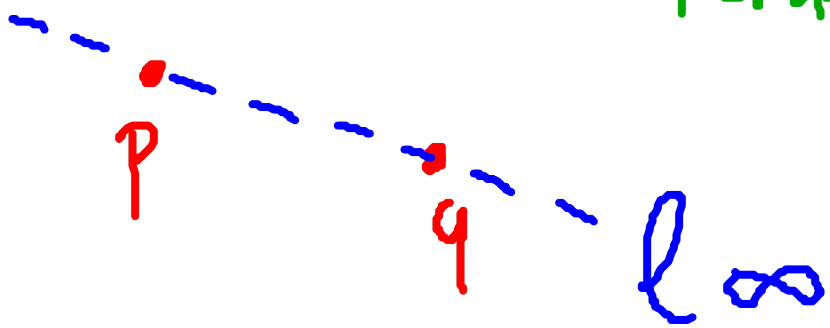


Gerade durch p in Richtung des Fernpunktes q

3. Fall $[p], [q]$ beides Fernpunkte

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} * \\ * \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ * \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

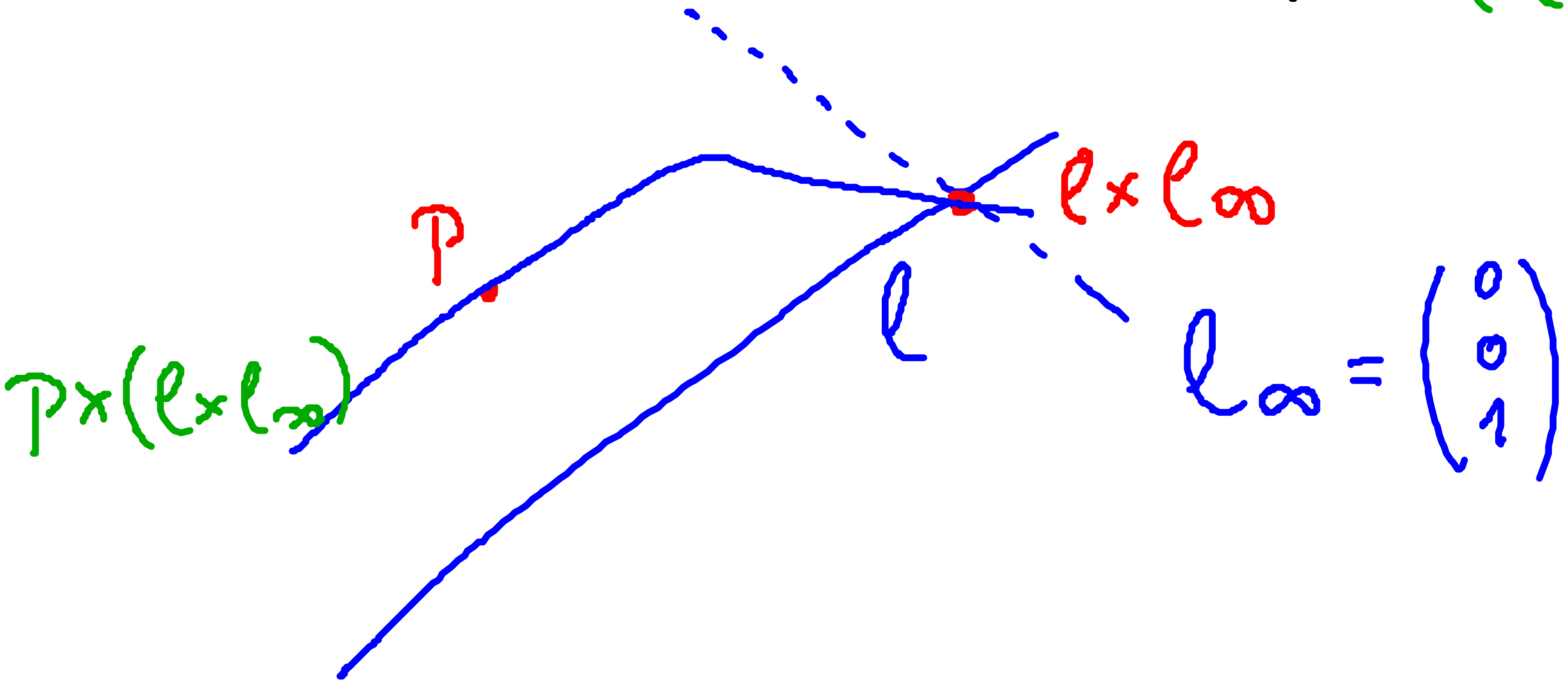
Ferngerade



Inzidenzeigenschaften

- Jedes Paar verschiedenen Punkte hat eine eindeutige Verbindungsgerade
- Jedes Paar verschiedener Geraden hat einen eindeutigen Schnittpunkt

Aufgabe: Gegeben seien Gerade [l] und ein Punkt [p]. Gesucht Parallele zu [l] durch [p]. $\left(l_\infty = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \right)$



Bisher: Repräsentantensichtweise

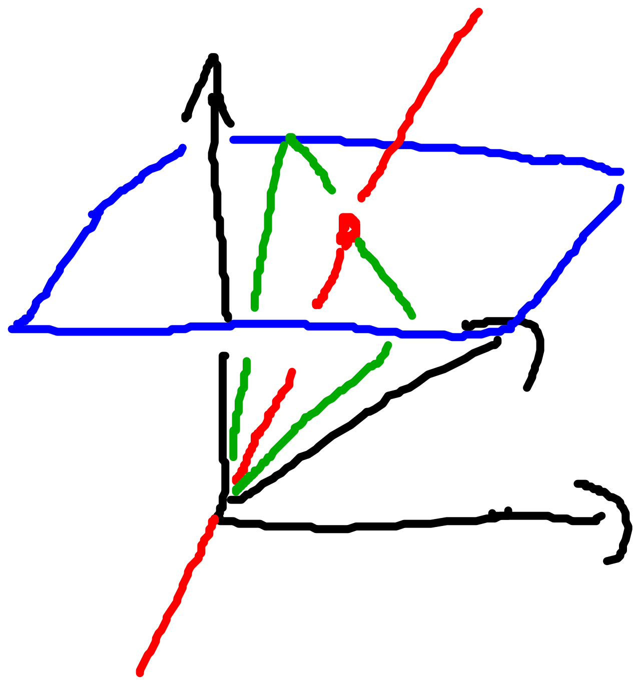
- Punkte → Vektoren im $\mathbb{R}^3$
- Geraden → Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Teilraumsichtweise

Punkte: die 1-dimensionalen linearen Teilräume des $\mathbb{R}^3$

Geraden: die 2-dimensionalen linearen Teilräume des $\mathbb{R}^3$

Inzidenz: Inzidenz der Teilräume



Sichtweise auf einer Kugel

Idee: Schneide die Teilräume mit der Einheitskugel $S^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, x^2+y^2+z^2=1 \right\}$

Punkt $\to$ Antipodales Punktepaar auf S^2

Gerade $\to$ Großkreise auf der S^2