Geometriekalküle

Kapitel 0: Vorrede

Wie rechnet man am Besten
mit geometrischen
Objekten.

Literatur: Geometriekalküle
R.G. Orendt.

Geometrie

„abstrakter Zugang"

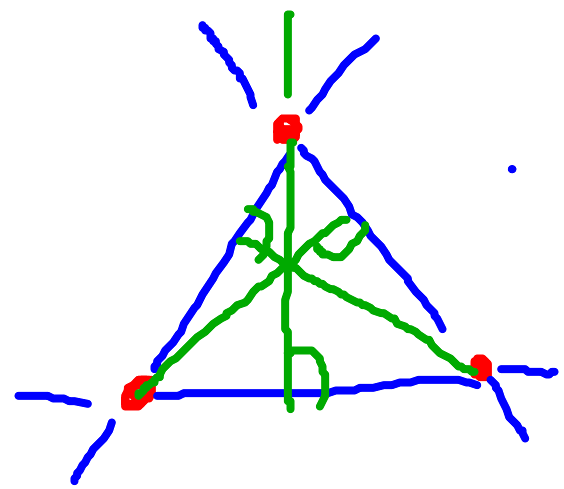
Logische Eigenschaften von Objekten

Axiome:

„Durch zwei versch. Punkte gibt es genau eine Gerade"

⋮

„sehr konkret"



„Punkte",

„Geraden"

„Kreise"

⋮

„rechnerisch"

→ Koordinaten

- algebraische Formel
- Parameter

z.B. Verbindungsgerade:

Punkte durch Vektoren im $\mathbb{R}^3$

$p, q \in \mathbb{R}^3$

$\ell = p \times q$

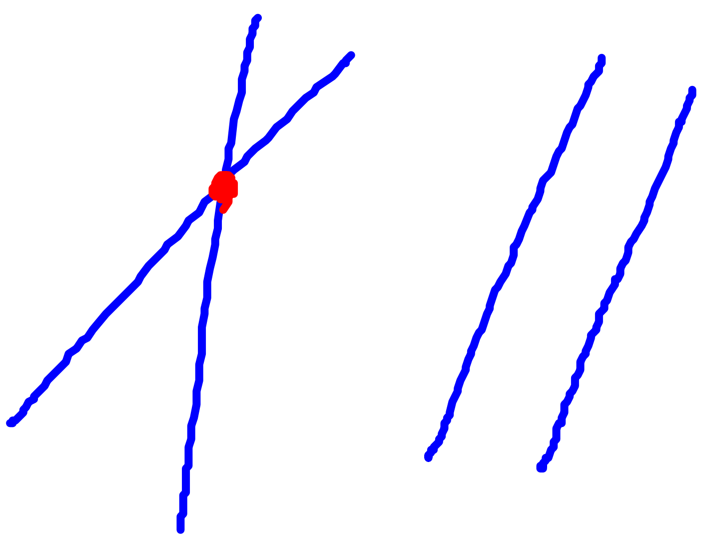
„Naiver Zugang"

- Koordinaten für Punkte, Geraden
  - Punkte (x,y) Koordinaten
  - Geraden durch Hesse Normalform

  ↳ Geometrische Operationen → „Ausrechnen"

  Aus alten Koordinaten neue gewinnen.

1. Problem: Sonderfälle



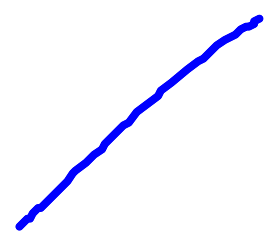
2. Problem: Systematik

gesucht ist möglichst einfache Darstellung Objekte + Operationen

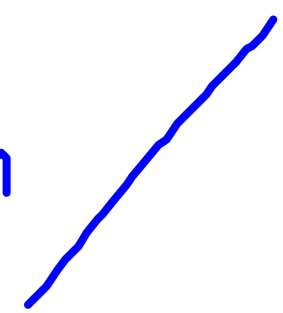
Typische Objekte

Punkt

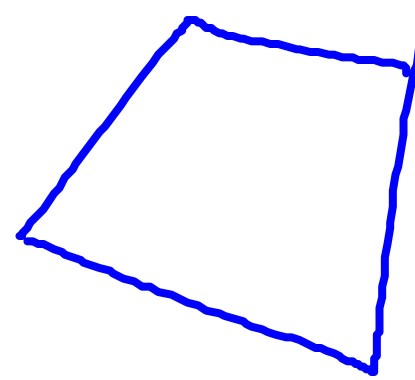
Gerade



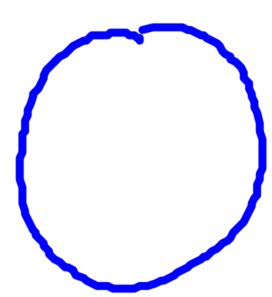
Geraden im Raum



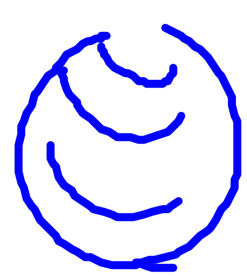
Ebenen im Raum



Kreis

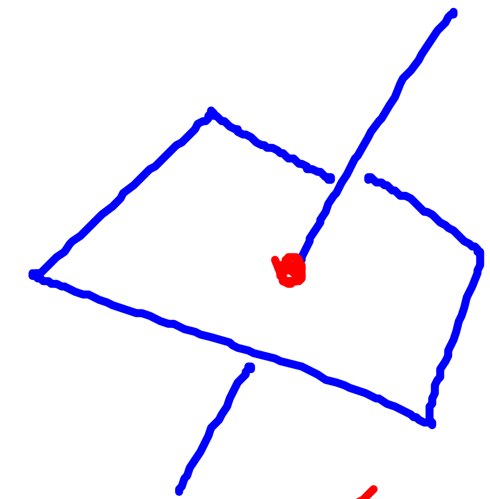


Kugeln

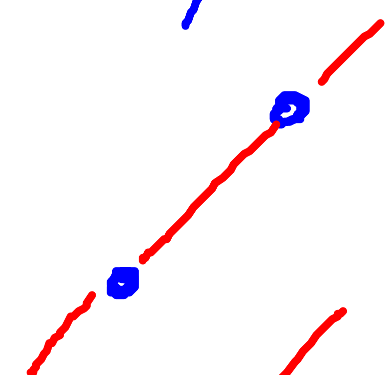


Typische Operatione

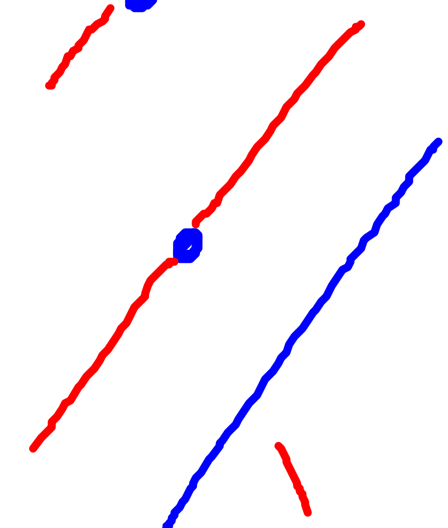
Schnitt (Meet)



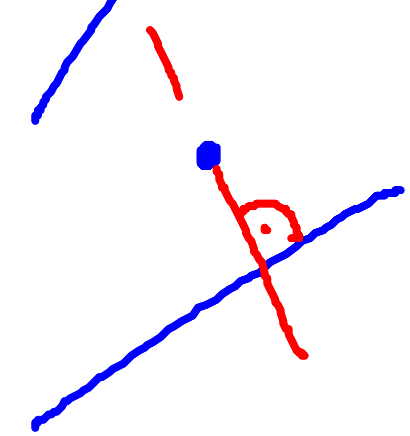
Verbindung (Join)



Parallele



Senkrechte



Typische Tricks

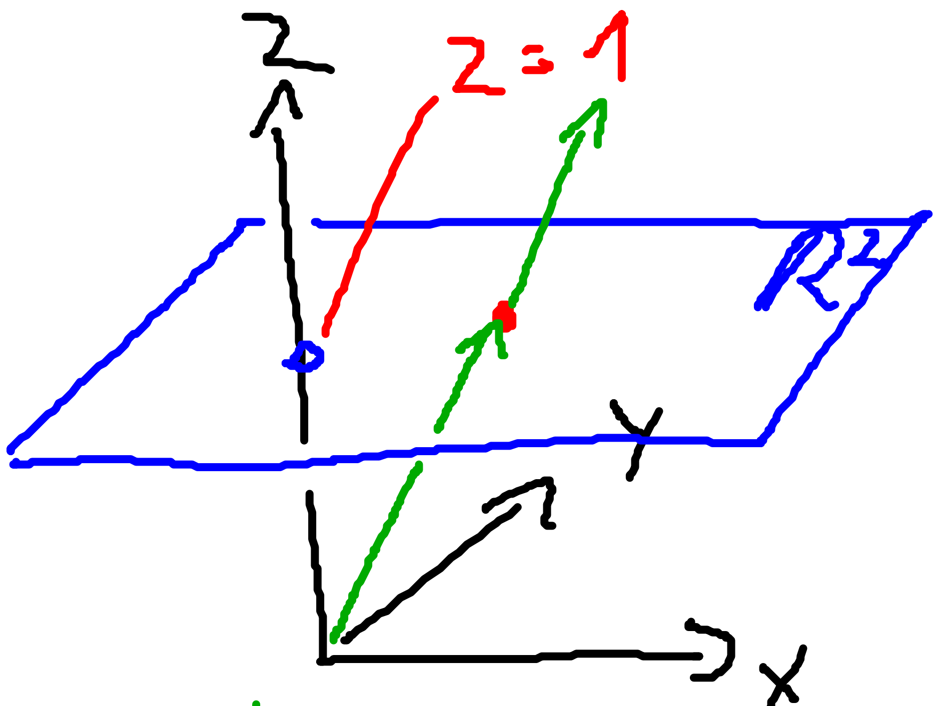
- Repräsentiere Objekte durch (hochdimensionale) Vektoren
- Drücke Transformationen durch Matrixmultiplikation aus.
- Benutze komplexe Zahlen (die sind zum Messen nützlich)

roten Faden

① Homogene Koordinaten

Objekte: Punkte & Geraden in der Ebene

Idee: Bette Zeichenebene in $\mathbb{R}^3$ ein



Identifiziere skalare Vielfache von Vektoren.

Homogenisieren

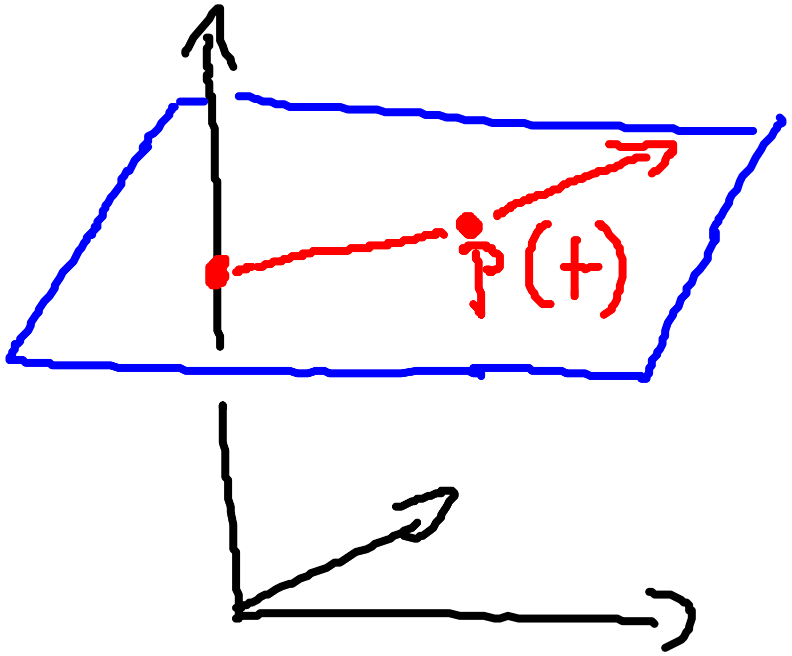
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \sim \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

Dehomogenisieren

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x/z \\ y/z \end{pmatrix}$$

Problem: Was passiert für $z = 0$



$$P(t) = \begin{pmatrix} x \cdot t \\ y \cdot t \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1/t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

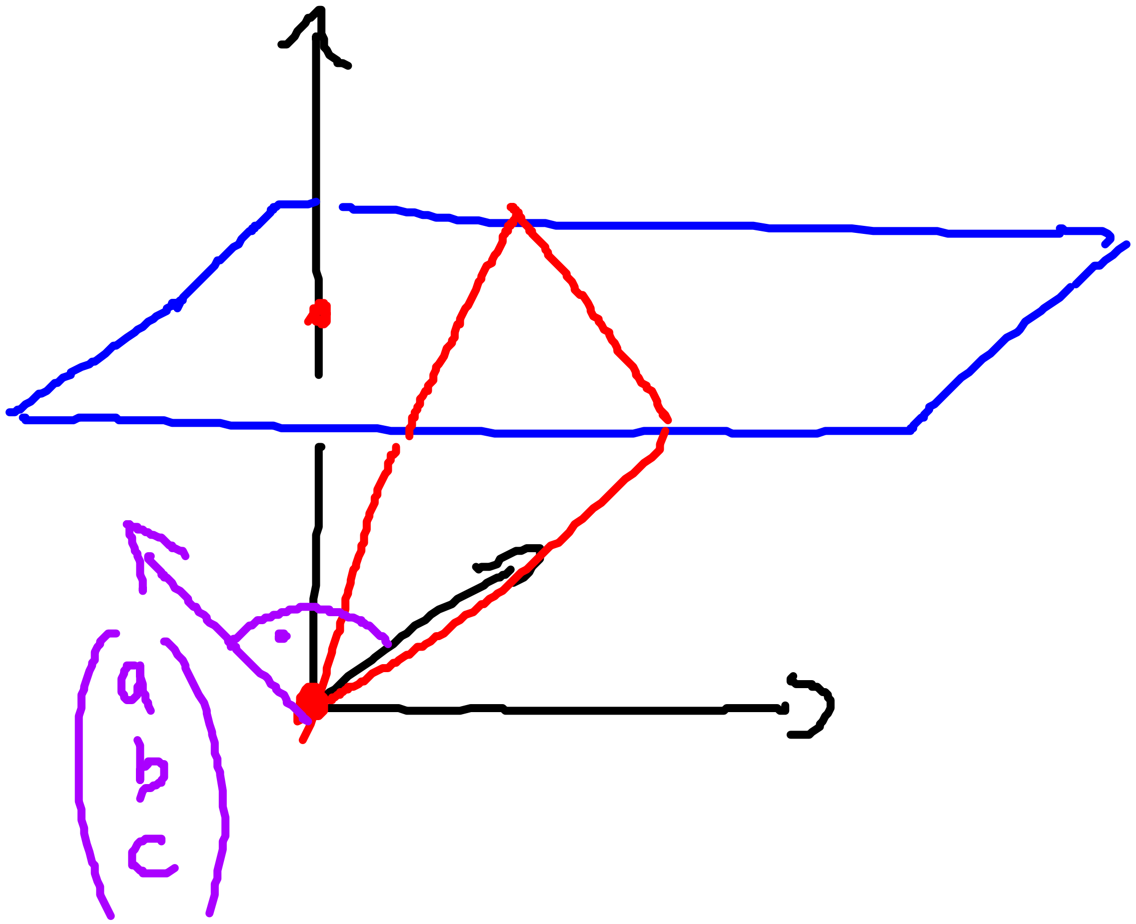
$$\lim_{t \to \infty} (P(t)) \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jeder Vektor in $\mathbb{R}^3 - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ hat eine geometrische Interpretation

Menge aller Punkte:

$$\mathbb{P} := \frac{\mathbb{R}^3 - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}{\mathbb{R} - \{0\}}$$

Geraden



Euklidische Gerade

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;\middle|\; ax + by + c = 0 \right\}$$

Geradenparameter

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \sim \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\mathcal{L} := \frac{\mathbb{R}^3 - \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}{\mathbb{R} - \{0\}}$$

Vielfache von Parameter-vektoren repräsentieren gleiche Gerade

Spezialfall $\ell = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

„Gerade im Unendlichen"

Inzidenz: Wann liegt Punkt p auf Gerade l

Naiv: $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ liegt auf

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, ax + bx + c = 0 \right\}$$

g.d.w. $ax + by + c = 0$

In homogenen Koordinaten:

$$0 = ax + by + c \cdot 1 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ liegt auf $l = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \langle l, p \rangle = 0$

Verbindungsgerade von p, q

$p \times q = \ell$ Verbindungsgerade

Schnitt zweier Geraden ℓ, m

$\ell \times m = p$ ist Schnittpunkt.